НКЗ СССР
БЕЛАРУСКІ СЕЛЬСКА-ГАСПАДАРЧЫ ІНСТЫТУТ
БЕЛОРУССКИЙ СЕЛЬСКО-ХОЗЯЙСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ
VOLKOMMISSARIAT FÜR LANDWIRTSCHAFT DER USSR
WEISSRUSSISCHES INSTITUT FÜR LANDWIRTSCHAFT

ТРУДЫ
БЕЛАРУСКАГА СЕЛЬСКА-ГАСПАДАРЧАГА ІНСТЫТУТА

ТОМ I (23)

ТРУДЫ
БЕЛОРУССКОГО СЕЛЬСКО-ХОЗЯЙСТВЕННОГО ИНСТИТУТА
ТОМ I (23)

WISSENSCHAFTLICHE WERKE DES WEISSRUSSISCHEN INSTITUTS FÜR LANDWIRTSCHAFT
BAND I (23)

ГОРКИ БССР
GÖRKI WEISSRUSSISCHE SSR
1935

НКЗ СССР
БЕЛАРУСКІ СЕЛЬСКА-ГАСПАДАРЧЫ ІНСТЫТУТ
БЕЛОРУССКИЙ СЕЛЬСКО-ХОЗЯЙСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ
VOLKOMMISSARIAT FÜR LANDWIRTSCHAFT DER USSR
WEISSRUSSISCHES INSTITUT FÜR LANDWIRTSCHAFT

ТРУДЫ
БЕЛАРУСКАГА СЕЛЬСКА-ГАСПАДАРЧАГА ІНСТЫТУТА

ТОМ I (23)

ТРУДЫ
БЕЛОРУССКОГО СЕЛЬСКО-ХОЗЯЙСТВЕННОГО ИНСТИТУТА
ТОМ I (23)

WISSENSCHAFTLICHE WERKE DES WEISSRUSSISCHEN INSTITUTS FÜR LANDWIRTSCHAFT
BAND I (23)

ГОРКИ БССР
GÖRKI WEISSRUSSISCHE SSR
1935

Праф. ПАПОЎ В. В.

УРОЎНАВАЖВАННЕ АДЗНАК ПРЫ ГЕОДЭЗІЧНЫМ НІВЕЛІРАВАННІ ПУНКТАЎ ТРЫГОНОМЕТРЫЧНАЙ СЕТКІ

I.

У нядаўна выдадзенай кнізе Н. А. Урмаева „Руководство по обработке триангуляций“ (Москва, 1932 г., изд. Управления Военных Топографов РККА) выкладаецца, між іншым, метад паступовых набліжэнняў для ўроўнаважвання адзнак, якія атрыманы з геодэзічнага нівеліравання трыгонометрычнай сеткі. Праф. Красоўскі Ф. Н., у рэцэнзіі, якая напісана ім для Маскоўскага Бібліаграфічнага інстытута, дае наступную ацэнку метада Урмаева:

„Уравнивание высот методом последовательных приближений, приводящим быстро к точным результатам, изложено в § 2; авторство метода в приведенной его разработке следует приписать Н. А. Урмаеву; несомненно, вряд-ли кто будет уравнивать теперь высоты в триангуляции иным методом“ [1]).

Мне здаецца, што спосаб, які выкладзены ў Н. А. Урмаева, не заслугоўвае такой ацэнкі. Больш таго, Н. А. Урмаевым дапушчаны ў дадзеным пытанні яўныя адхіленні ад запатрабаванняў рацыянальнай пастаноўкі ураўніцельных вылічэнняў наогул і вылічэнняў метадам паступовых набліжэнняў—у асаблівасці.

Ва ўсіх вылічэннях, пачынаючы з першага набліжэння і да апошняга, Н. А. Урмаеў мае справу **т о л ь к і з а д з н а к а м і**, г. зн. з лічбамі, наогул кажучы, 4—5—значнымі, а **н е з п а п р а ў к а м і** да набліжаных значэнняў адзнак, як гэта звычайна робіцца ў практыцы ураўніцельных вылічэнняў. Пры адшуканні **а г у л ь н а й а р ы ф м е т ы ч н а й с я р э д з і н ы**, як у першым, гэтак і ва ўсіх астатніх набліжэннях, ён кожны раз нанова вылічвае, пры дапамозе вымераных перавышкаў, набліжаныя адзнакі, потым выдзяляе іх агульную частку і г. д. Зразумела, што працэс уроўнаважвання будзе значна прасцей і карацей, калі пакінуць вылічэнне адзнак непасрэдна праз вымераныя перавышкі толькі ў пачатковай стадыі—пры атрыманні выходных набліжэнняў—і ў канцы—пры атрыманні канчатковых вынікаў;

[1]) „Геодезист“. Москва, 1932, № 9—10, стр. 82.

усе-ж астатнія дзеянні рабіць у граніцах невялічкіх паправачных членаў.

Н. А. Урмаеў строга размяжоўвае набліжэнні першага парадку ад набліжэнняў другога парадку, гэтыя апошнія ад набліжэнняў трэцяга парадку і г. д. Гэтая акалічнасць мае ў яго той сэнс, што набліжэнне κ-га парадку для адзнакі кожнага пункта ён атрымоўвае абавязкова праз набліжаныя значэнні κ—1-ага парадку адзнак сумежных пунктаў, хаця-б для гэтых апошніх ужо меліся набліжэнні κ—ага парадку. Такім чынам шэраг дзеянняў ён робіць зусім дарэмна. Навошта, напрыклад, губіць час на адшуканне другога набліжэння для адзнакі апошняга пункта, калі ўжо маюцца другія набліжэнні для адзнак усіх астатніх пунктаў і, значыцца, адзнаку апошняга пункта мажліва ўжо вылічыць у больш дакладным трэцім (па нумерацыі Н. А. Урмаева) набліжэнні. Зразумела, што схадзімасць набліжэнняў значна паскорыцца, калі пры адшуканні ўсякага κ—ага набліжэння для адзнакі дадзенага пункта скарыстаць набліжаныя значэнні $k—1$-ага парадку адзнак усіх наступных пунктаў і ужо вызначаныя набліжэнні κ-ага парадку адзнак усіх папярэдніх пунктаў.

У вылічэннях Н. А. Урмаева фігуруюць, між іншым, некаторыя лічбы p', якія ён называе вагамі (весамі). Пры сумесным уроўнаважванні нівелірнай і ўсякай іншай сеткі, вагі ўсіх велічынь, якія ўваходзяць ва ўроўнаважванне, павінны быць выражаны ў аднолькавых адзінках, тады як у Н. А. Урмаева лічбы p' гэтай умове не здавальняюць, бо яны з'яўляюцца стасункамі вагаў паасобных перавышкаў да сумы вагаў перавышкаў па лініях, якія сходзяцца ў тым альбо іншым пункце. Каб унікнуць магчымых непаразуменняў, лічбы p' называць вагамі (весами) не трэба.

Незалежна ад гэтай памылкі тэрміналагічнага парадку, Н. А. Урмаеў наогул няправільна вызначае вагі перавышкаў. Маючы мэтай не толькі узгадніць паміж сабой вынікі вымярэнняў, але атрымаць найпраўдападобныя значэнні адзнак, якія дае, па выразу Н. А. Урмаева—„строгий способ уравнивания посредственных или условных измерений“ [1]), г. зн.—спосаб найменшых квадратаў,—ён павінен быў перш за ўсё паклапаціцца аб тым, каб вызначыць вагі перавышкаў больш правільна, чымся робяць гэта пры спрошчаным адвольным уроўнаважванні.

Н. А. Урмаеў вылічвае вагі згодна формулы:

$$p = \frac{c}{s^2} \qquad (1),$$

у якой c—сталы лік, а s—адлегласць, на якую непасрэдна пера-

---

[1]) Н. А. Урмаев. Руководство по обработке триангуляций, стар. 165.

даецца адзнака. Між тым, пры вялікіх адлегласцях (у прыкладзе Н. А. Урмаева s змяняецца ад 7 да 26 км), вагі перавышкаў, атрыманых з неадначасовых двубаковых альбо аднабаковых нагляданняў, патрэбна вызначаць па формуле:

$$p = \frac{c}{m_z^2 \sin^2 1'' \cdot s^2 + m_k^2 \frac{s^4}{4R^2}} \text{ [1]}, \qquad (2)$$

дзе:

m_z —сярэдняя квадратычная памылка зенітнай адлегласці, выражаная ў секундах;

m_k —сярэдняя квадратычная памылка коэфіцыента земнай рэфракцыі;

R—радыус земнай кулі.

У далейшым (гл. стар. 6—8, формулы 3 і 4) мы дадзім гэтую формулу (2) у больш простым выглядзе. Вагі, узятыя Н. А. Урмаевым у яго лічбовым прыкладзе, адрозніваюцца ад больш дасканалых вагаў, вылічаных па формуле (2), на некалькі соцен процантаў [2]). Пры такіх умовах дасканаласць уроўнаважвання, якая, быццам, дасягаецца ў Н. А. Урмаева, з'яўляецца даволі праблематычнай.

Формулы (1) і (2) даюць больш-менш аднолькавыя вагі толькі пры s < 3 км,—таму—у трыгонометрычнай сетцы—вагі перавышкаў трэба вызначаць, як правіла, па формуле (2) [3]).

Адносна выкладзенага ў Н. А. Урмаева аб уроўнаважванні адзнак трэба зрабіць яшчэ наступныя заўвагі:

1) Няма сэнсу вызначаць вагі перавышкаў у выглядзе 2—3 значных лікаў,—зусім дастаткова абмежавацца 1—2 знакамі, тым больш—пры наяўнасці вельмі грубага дапушчэння ў самой формуле, па якой вылічваюцца гэтыя вагі.

2) Н. А. Урмаеў процістаўляе выкладзены ім метад як метаду пасрэдных нагляданняў, гэтак і метаду умоўных нагляданняў [4]). Такое проціпастаўленне ў дадзеным выпадку недарэчы, бо гутарка ідзе якраз аб метадзе пасрэдных нагляданняў з развязваннем нармальных раўнанняў шляхам паступовых набліжэнняў.

3) У выпадку уроўнаважвання высот у звычайным ланцугу трыкутнікаў з адным цвёрдым пунктам, больш карысна ўжываць метад умоўных нагляданняў. Пры гэтым вызначэнне паправак мажліва таксама рабіць шляхам паступовых набліжэнняў [5]).

---

[1]) Гл. W. Jordan—O. Eggert. Handbuch der Vermessungskunde, II т. 1914 г. стар. 618—620.

[2]) Зразумела, гутарка ідзе не аб абсалютных, а аб адносных значэннях вагі.

[3]) Так іменна раіцца вызначаць вагі перавышкаў ў апошнім выданні „Handbuch der Vermessungskunde“ Jordan'a-Eggert'a (гл. том II, выд. 1933 г., стар. 154).

[4]) Н. А. Урмаев. „Руководство по обработке триангуляций“, стар. 164, радкі 1—4 знізу.

[5]) Гл. Попов В. В. „Увязка полигонов“ Горки, выд. 3, 1930 г.

Трэба, аднак, падкрэсліць, што прыведзеныя заўвагі нашы датычацца толькі невялічкай часткі кнігі Н. А. Урмаева, а імення главы VII. Кніга ў цэлым уяўляе сабою вельмі каштоўны ўклад у геодэзічную літаратуру і ў гэтых адносінах трэба згадзіцца з рэцэнзіяй праф. Красоўскага.

Уроўнаважванне нівелірнай сеткі метадам паступовых набліжэнняў на аснове прынцыпа арыфметычнай сярэдзіны было прапанована таксама Анэрам (Hjalmar Anèr, Stockholm). Апісанне спосаба Анэра ёсць у „Zeitschrift für Vermessungswesen", том LV, 1926, стар. 65—69. Гэты спосаб мала чым адрозніваецца ад спосаба, які апісаны ў кнізе Н. А. Урмаева. Амаль усе заўвагі, якія зроблены вышэй адносна спосаба Н. А. Урмаева, датычацца і да спосаба Анера. Тая абставіна, што ў Анэра вылічэнне паступовых набліжэнняў робіцца толькі ў граніцах частак адзнак (у граніцах дэцыметраў і сантыметраў) сутнасці справы не меняе: ў яго, як і ў Н. А. Урмаева, колькасць вылічальнай работы, патрэбнай для атрымання першага і ўсіх наступных набліжэнняў, застаецца аднолькавай. У спосабе Анэра ёсць, акрамя таго, адна цікавая асаблівасць, аб якой мы будзем гаварыць далей, і якая прымушае лічыць яго асноўныя разважанні па гэтаму пытанню зусім памылковымі.

II.

Прайшло ўжо больш дзесяці гадоў, як мною распрацаваны і атрымалі шырокае распаўсюджанне спецыяльныя спосабы уроўнаважвання незалежна вымераных велічынь, сумы якіх вядомы з тэарэтычных меркаванняў [1]). Прыёмы гэтыя апісаны між іншым, у маёй рабоце „Увязка полигонов".

Яны належаць, зразумела, і да ўвязкі адзнак у нівелірнай сетцы як пры геометрычным, гэтак і пры геодэзічным нівеліраванні, даючы заўсёды вынік, які строга здавальняе спосабу найменшых квадратаў. Хаця ў маёй „Увязке полигонов" і не дадзена лічбовага прыклада на уроўнаважванне вынікаў г е о д э з і ч н а г а нівеліравання (ёсць прыклады з практыкі геометрычных нівеліровак), але сутнасць справы досыць ясна і без прыклада. Мне вядома, што шэраг працаўнікоў вытворчасці ўжываюць прапанаваныя мною спосабы і ў практыцы геодэзічнага нівеліравання.

У памянёнай рабоце маёй выкладзены, між іншым, так званы м е т а д у з л о ў [2]) і прапанаваны, ў прыватнасці, с п о с а б п а с т у п о в ы х н а б л і ж э н н я ў, як адзін з шляхоў развяз-

---

[1]) Гэтыя прыёмы з поспехам ужываюцца і пры ўроўнаважванні прыростаў каардынат у палігонаметрыі, хаця апошнія і не з'яўляюцца незалежна вымеранымі.

[2]) Попов В. В. „Увязка полигонов", 3-е выд., 1930 г. стар. 45—64.

вання нармальных раўнанняў [1]). Спосаб мой распрацаваны многа раней за апублікаванне ў друку і работы Урмаева Н. А. і работы Анэра на дадзеную тэму. Ён адрозніваецца ад спосабаў Анэра і Урмаева перш за ўсё тым, што ў ім няма тых грунтоўных недахопаў, аб якіх сказана вышэй: пры вылічэнні ўсіх набліжэнняў, акрамя першага, даводзіцца ў нас дзейнічаць толькі з невялічкімі, звычайна адназначнымі, і пры гэтым—шпарка спадаючымі лічбамі; пры атрыманні кожнага наступнага набліжэння цалкам скарыстоўваюцца ўсе набліжэнні, якія атрыманы раней, і г. д.

У выніку ўсяго гэтага уроўнаважванне робіцца ў нас значна хутчэй і дасягаецца зусім дастатковая дакладнасць, не менш той, якую даюць спосабы Анэра і Урмаева.

Улічваючы вялікі інтарэс да дадзенага пытання, выкліканы работай Н. А. Урмаева і рэцэнзіяй праф. Красоўскага, я мяркую застанавіцца ў дадзеным артыкуле на пытанні непасрэднага дапасавання прапанаванага мною метада паступовых набліжэнняў спецыяльна да уроўнаважвання адзнак пры геодэзічным нівеліраванні. У маёй „Увязке полигонов" прыведзена тэорэтычнае абгрунтаванне метада, выходзячы непасрэдна з прынцыпа арыфметычнай сярэдзіны. Зараз мы дадзім тэорэтычнае абгрунтаванне звычайным шляхам, прынятым у спосабе найменьшых квадратаў. Дадзім таксама новыя схемы вылічэнняў, спэцыяльна прыстасаваныя да уроўнаважвання вынікаў **геодэзічнага** нівеліравання пунктаў трыгонометрычнай сеткі і тэорэтычнае абгрунтаванне таго віда метада паступовых набліжэнняў, які, на нашу думку, лепш падыходзіць да асаблівасцей геодэзічнага нівеліравання.

Абмяркуем, перш за ўсё, пытанне аб вагах перавышкаў. Пры гэтым разгледзім два выпадкі.

ВЫПАДАК І. Адзнакі перадаюцца непасрэдна праз бакі трохвугольнікаў II класа. Даўжыня бакоў змяняецца ад 7 да 25 км.

Адзінку вагі аднясем да бока даўжынёй $s_1 = 15$ км. Улічваючы дадзеныя спецыяльнай літаратуры [2]), прымем сярэднюю квадратычную памылку зенітнай адлегласці—

$$m_z = \pm 3'',$$

а сяр кв. памылку коэфіцыента земнай рэфракцыі—

---

[1]) Попов В. В. „Увязка полигонов" 3-е выд. 1930 г., стар. 53—57.

[2]) Jordan-Eggert. Handbuch d. Vermessungskunde, B. II 1914, S. 619., Красовский Ф. Н. Руководство по высшей геодезии, ч. I, 1926, стар. 461. Урмаев Н. А. Руководство по обработке триангуляций, 1932, стар. 163 і інш.

$$m_k = \pm 0{,}03$$

Радыус крывізны земнага сфероіда R возьмем для шыраты $\varphi = 55°$, палажыўшы:

$$\frac{1}{R^2} = 2{,}453 \times 10^{-14}.$$

Яго мажліва лічыць сталым для ўсёй тэрыторыі СССР.

Даўжыні ліній s будзем выражаць у дзесятках кілометраў і абазначаць, у звязку з гэтым, праз s_{10}.

Падставіўшы ўсё гэта ў формулу (2), атрымаем:

$$p = \frac{c}{9 \,.\, \mathrm{Sin}^2 1'' \,.\, s_{10}^2 \,.\, 10^8 + \frac{1}{4} \,.\, 2{,}453 \,.\, 10^{-14} \,.\, 9 \,.\, 10^{-4} \,.\, s_{10}^4 \,.\, 10^{16}}$$

альбо:

$$p = \frac{c}{2{,}12 \,.\, 10^{-2} \,.\, s_{10}^2 + 5{,}52 \,.\, 10^{-2} \,.\, s_{10}^4}$$

Падзяліўшы лічніка і назоўніка на $2{,}12 \,.\, 10^{-2}$ і абазначыўшы:

$$C = c : 0{,}0212,$$

будзем мець:

$$p = \frac{C}{s_{10}^2 (1 + 2{,}60 \,.\, s_{10}^2)}$$

Вышэй сказана, што вагу, роўную адзінцы, мы аднеслі да $s_1 = 15$ км, г. зн. да $s_{10} = 1{,}5$.

Адсюль:

$$1 = \frac{C}{1{,}5^2 (1 + 2{,}60 \,.\, 1{,}5^2)} = \frac{C}{15{,}4}$$

Значыцца:

$$C = 15{,}4$$

Такім чынам, для выпадка I будзем канчаткова мець формулу

$$p = \frac{15{,}4}{s_{10}^2 (1 + 2{,}6 \,.\, s_{10}^2)} \qquad (3)$$

Для гэтай формулы складзена табліца № 1, якая падаецца ніжэй.

Табліца № 1

для вызначэння вагаў перавышкаў пры s ад 7 да 25 км.

($s_1 = 15$ км, $m_z = \pm 3''$; $m_k = \pm 0{,}03$)

s	p	s	p	s	p	s	p	s	p
7,0	13,8	8,0	9,0	9,0	6,1	10,0	4,3	20,0	0,3
7,1	13,2	8,1	8,7	9,1	5,9	11,0	3,1	21,0	0,3
7,2	12,6	8,2	8,3	9,2	5,7	12,0	2,2	22,0	0,2
7,3	12,1	8,3	8,0	9,3	5,5	13,0	1,7	23,0	0,2
7,4	11,6	8,4	7,7	9,4	5,3	14,0	1,3	24,0	0,2
7,5	11,1	8,5	7,4	9,5	5,1	15,0	1,0	25—32	0,1
7,6	10,7	8,6	7,1	9,6	4,9	16,0	0,8		
7,7	10,2	8,7	6,9	9,7	4,8	17,0	0,6		
7,8	9,8	8,8	6,6	9,8	4,6	18,0	0,5		
7,9	9,4	8,9	6,4	9,9	4,4	19,0	0,4		

Выпадак II. Адзнакі перадаюцца праз бакі трохвугольнікаў III класа. Даўжыня бакоў змяняецца ад 3 да 15 км.

Адзінку вагі аднясем да бока даўжынёй $s_1 = 8$ км.

Улічваючы асаблівасці нагляданняў на пунктах III класа: меншую вышыню візірнага луча над мясцовымі прадметамі, меншую дакладнасць інструмантаў і г. д., прымем, на гэты выпадак:

$$m_z = \pm 4''$$

Памылку m_k заставім, як прынята ў выпадку I, роўнай $\pm 0{,}03$.

Падставіўшы гэтыя велічыні ў формулу (2), атрымаем:

$$p = \frac{c}{16 \cdot \mathrm{Sin}^2 1'' \cdot s_{10}^2 \cdot 10^8 + \frac{1}{4} \cdot 2{,}453 \cdot 10^{-14} \cdot 9 \cdot 10^{-4} \cdot s_{10}^4 \cdot 10^{16}}$$

альбо:

$$p = \frac{c}{3{,}76 \cdot 10^{-2} \cdot s_{10}^2 + 5{,}52 \cdot 10^{-2} \cdot s_{10}^4}$$

Падзяліўшы лічніка і назоўніка на $3{,}76 . 10^{-2}$ і абазначыўшы с : 0,0376 праз С, атрымаем:

$$p = \frac{C}{s_{10}^2 (1 + 1{,}47 . s_{10}^2)}$$

З умовы, што пры $s = 8$ км. вага павінна раўняцца адзінке, вызначым сталае С. Атрымаем:

$$C = 0{,}8^2 (1 + 1{,}47 . 0.8^2) = 1{,}24$$

Такім чынам будем мець наступную канчатковую формулу:

$$p = \frac{1{,}24}{s_{10}^2 (1 + 1{,}47 \, s_{10}^2)} \qquad (4)$$

Для гэтай формулы складзена табліца № 2.

Табліца № 2

для вызначэння вагаў перавышкаў пры s ад 3 да 15 км.

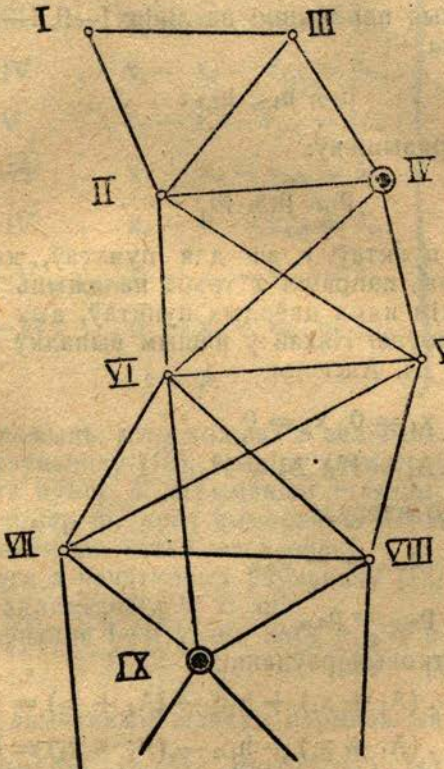
($s_1 = 8$ км; $m_z = \pm 4''$; $m_k = \pm 0{,}03$)

s	p	s	p	s	p	s	p
3,0	12,2	4,0	6,3	5,0	3,6	6,0	2,3
3,1	11,3	4,1	5,9	5,1	3,5	7,0	1,5
3,2	10,5	4,2	5,6	5,2	3,3	8,0	1,0
3,3	9,8	4,3	5,3	5,3	3,1	9,0	0,7
3,4	9,2	4,4	5,0	5,4	3,0	10,0	0,5
3,5	8,6	4,5	4,7	5,5	2,8	11,0	0,4
3,6	8,0	4,6	4,5	5,6	2,7	12,0	0,3
3,7	7,6	4,7	4,2	5,7	2,6	13,0	0,2
3,8	7,1	4,8	4,0	5,8	2,5	14,0	0,2
3.9	6,7	4,9	3,8	5,9	2,4	15—19	0,1

УВАГА: Калі ў дадзенай сетцы ёсць перавышкі, якія атрыманы шляхам аднабаковых назіранняў, іх трэба браць з вагой, паменшанай у два разы.

III.

Возьмем сетку адвольнага выгляда (гл. рыс. 1). Абазначым: набліжаныя адзнакі пунктаў I, II, III . . . , адпаведна, праз—



Рыс. 1.

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ .\ .\ .\ ;$$

канчаткова ўроўнаважаныя адзнакі—праз—

$$H_1,\ H_2,\ H_3\ .\ .\ .$$

і папраўкі, якія неабходна дадаць да набліжаных адзнак, каб атрымаць канчатковыя,—праз—

$$x_1,\ x_2,\ x_3\ .\ .\ .$$

Няхай вымераныя перавышкі па лініях I—II, I—III, II—III, . . . будуць, адпаведна,—

$$h_{1,2},\ h_{1,3},\ h_{2,3}\ .\ .\ .$$

Вагі гэтых перавышкаў:

$$p_{1,2},\ p_{1,3},\ p_{2,3}\ .\ .\ .$$

Для цвёрдых пунктаў, г. зн. для пунктаў, канчатковыя адзнакі якіх дадзены, папраўкі x трэба палажыць роўнымі нулю. Калі ў сетцы зусім няма цвёрдых пунктаў, дык адзін пункт лічуць цвёрдым умоўна. Няхай у нашым выпадку цвёрдымі пунктамі будуць IV і IX. Адсюль:

$$x_4 = 0;\ x_9 = 0 \tag{5}$$

$$A_4 = H_4;\ A_9 = H_9 \tag{6}$$

Адзначым, што наогул:

$$h_{m,n} = -\ h_{n,m} \tag{7}$$

і

$$p_{m,n} = p_{n,m} \tag{8}$$

Складзем пачатковыя раўнанні:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{па лініі} & \text{I—II} & .\ .\ (A_1 + x_1) + h_{1,2} - (A_2 + x_2) = \delta_{1,2} \\ \text{,,}\quad \text{,,} & \text{I—III} & .\ .\ (A_1 + x_1) + h_{1,3} - (A_3 + x_3) = \delta_{1,3} \\ \text{,,}\quad \text{,,} & \text{II—III} & .\ .\ (A_2 + x_2) + h_{2,3} - (A_3 + x_3) = \delta_{2,3} \\ & & \text{і г. д.} \end{array}\right\} \tag{9}$$

Прымем абазначэнні:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{па лініі} & \text{I—II} & .\ .\ A_1 + h_{1,2} - A_2 = v_{1,2} \\ \text{,,}\quad \text{,,} & \text{I—III} & .\ .\ A_1 + h_{1,3} - A_3 = v_{1,3} \\ \text{,,}\quad \text{,,} & \text{II—III} & .\ .\ A_2 + h_{2,3} - A_3 = v_{2,3} \\ \text{,,}\quad \text{,,} & \text{II—I} & .\ .\ A_2 + h_{2,1} - A_1 = v_{2,1} \\ & & \text{і г. д.} \end{array}\right\} \tag{10}$$

Адзначым, што згодна суадносін (7) мажліва напісаць:

$$v_{m,n} = - v_{n,m} \tag{11}$$

Такім чынам, у адпаведнасці з суадносінамі (5), (6), (10) і (11) пачатковыя раўнанні (9) мажліва перапісаць так:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{I—II} \ldots & x_1 - x_2 - v_{2,1} = \delta_{1,2} \\
\text{I—III} \ldots & x_1 - x_3 - v_{3,1} = \delta_{1,3} \\
\text{II—III} \ldots & x_2 - x_3 - v_{3,2} = \delta_{2,3} \\
\text{II—IV} \ldots & x_2 - x_4 - v_{4,2} = \delta_{2,4} \\
\text{II—V} \ldots & x_2 - x_5 - v_{5,2} = \delta_{2,5} \\
\text{II—VI} \ldots & x_2 - x_6 - v_{6,2} = \delta_{2,6} \\
\text{III—IV} \ldots & x_3 - 0 - v_{4,3} = \delta_{3,4} \\
\text{IV—V} \ldots & 0 - x_5 - v_{5,4} = \delta_{4,5} \\
\text{IV—VI} \ldots & 0 - x_6 - v_{6,4} = \delta_{4,6} \\
& \text{і г. д.}
\end{array}\right\} \tag{12}$$

Трэба заўважыць, што кожная з велічынь $v_{m,n}$ уяўляе сабою як відаць з раўнанняў (10), розніцу (невязку) паміж значэннем адзнакі пункта нумар n, атрыманым шляхам перадачы ад суседняга пункта номер m, праз вымераную перавышку $h_{m,n}$, і набліжаным значэннем An гэтай жа адзнакі.

Вагу кожнага з пачатковых раўнанняў (12) мы павінны ўзяць роўнай вазе адпаведнага h, г. зн.:

Для раўнання I—II узяць вагу $p_{1,2} = p_{2,1}$

" " I—III " " $p_{1,3} = p_{3,1}$

і г. д.

Складзем звычайным шляхам нармальныя раўнанні:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{I} \ldots (p_{2,1} + p_{3,1}) x_1 - p_{2,1} x_2 - p_{3,1} x_3 - (p_{2,1} v_{2,1} + p_{3,1} v_{3,1}) = 0 \\
\text{II} \ldots (p_{1,2} + p_{3,2} + p_{4,2} + p_{5,2} + p_{6,2}) x_2 - p_{1,2} x_1 - p_{3,2} x_3 - p_{5,2} x_5 - \\
- p_{6,2} x_6 - (p_{1,2} v_{1,2} + p_{3,2} v_{3,2} + p_{4,2} v_{4,2} + p_{5,2} v_{5,2} + p_{6,2} v_{6,2}) = 0 \\
\text{III} \ldots (p_{1,3} + p_{2,3} + p_{4,3}) x_3 - p_{1,3} x_1 - p_{2,3} x_2 - (p_{1,3} v_{1,3} + \\
\qquad + p_{2,3} v_{2,3} + p_{4,3} v_{4,3}) = 0 \\
\text{V} \ldots (p_{2,5} + p_{4,5} + p_{6,5} + p_{7,5} + p_{8,5}) x_5 - p_{2,5} x_2 - p_{6,5} x_6 - \\
- p_{7,5} x_7 - p_{8,5} x_8 - (p_{2,5} v_{2,5} + p_{4,5} v_{4,5} + p_{6,5} v_{6,5} + p_{7,5} v_{7,5} + \\
\qquad + p_{8,5} v_{8,5}) = 0 \\
\qquad \text{і г. д.}
\end{array}\right\} \tag{13}$$

Супастаўляючы пабудову гэтых раўнанняў з распарадкаваннем пунктаў і ліній на рыс. 1, лёгка заўважыць вельмі простае правіла, карыстаючысь якім мажліва напісаць нармальныя раўнанні непасрэдна па рысунку, не складаючы пачатковых раўнанняў. У звязку з гэтым аднясем кожнае раўнанне да адпаведнага пункта згодна нумерацыі апошніх. Паколькі для цвёрдых пунктаў папраўкі x роўны нулю, нармальныя раўнанні для гэтых пунктаў адсутнічаюць (у сістэме 13 няма раўнанняў з нумарамі IV і IX).

Коэфіцыент пры x_1—у раўнанні I, коэфіцыент пры x_2—у раўнанні II і г. д., уяўляюць сабою, як відаць з рысунка 1, сумы вагаў перавышкаў па ўсіх лініях, якія выходзяць, адпаведна, з пунктаў I, II і г. д. Абазначым іх так:

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = p_{2,1} + p_{3,1} \\ P_2 = p_{1,2} + p_{3,2} + p_{4,2} + p_{5,2} + p_{6,2} \\ \qquad\text{і г. д.} \end{array}\right\} \quad (14)$$

Абазначым таксама:

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = p_{2,1}\, v_{2,1} + p_{3,1}\, v_{3,1} \\ V_2 = p_{1,2}\, v_{1,2} + p_{3,2}\, v_{3,2} + p_{4,2}\, v_{4,2} + p_{5,2}\, v_{5,2} + p_{6,2}\, v_{6,2} \\ \qquad\text{і г. д.} \end{array}\right\} \quad (15)$$

Велічыня V_1 уяўляе сабою, як відаць зноў-такі з рысунку 1, суму здабыткаў pv, якія адносяцца да ўсіх ліній, выходзячых з пункта I. Такой-жа сэнс мае V_2 у адносінах да пункта II, V_3—у адносінах да пункта III і г. д.

Пры уроўнаважванні нашым „метадам вузлоў" (пасрэдныя нагладанні) гэтыя велічыні V граюць такую-ж самую ролю, як невязкі фігур пры уроўнаважванні „метадам полігонаў" (умоўныя нагляданні)[1], чаму будзем умоўна называць іх у далейшым невязкамі пунктаў: V_1—невязка пункта I, V_2—невязка пункта II і г. д.

З абазначэннямі (14) і (15) нармальныя раўнанні (13) перапішуцца так:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I}\;. & P_1 x_1 - p_{2,1} x_2 - p_{3,1} x_3 - V_1 = 0 \\ \text{II}\;. & P_2 x_2 - p_{1,2} x_1 - p_{3,2} x_3 - p_{5,2} x_5 - p_{6,2} x_6 - V_2 = 0 \\ \text{III}\;. & P_3 x_3 - p_{1,3} x_1 - p_{2,3} x_2 - V_3 = 0 \\ \text{V}\;. & P_5 x_5 - p_{2,5} x_2 - p_{6,5} x_6 - p_{7,5} x_7 - p_{8,5} x_8 - V_5 = 0 \\ & \qquad\text{і г. д.} \end{array}\right\} \quad (16)$$

[1] Гл. Попов. „Увязка полигонов", 3-е выд. 1930 г.; раўнанні (14) на стар. 22 і раўнанні (43) на стар. 49.

IV.

Пры развязванні раўнанняў (16) способам паступовых набліжэнняў будзем лічыць за невядомыя:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= P_1\, x_1 \\ X_2 &= P_2\, x_2 \\ &\text{і г. д.} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Адсюль:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{X_1}{P_1} \\ x_2 &= \frac{X_2}{P_2} \\ &\text{і г. д.} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Пасля падстаноўкі з (18) у (16) атрымаем:

$$\left.\begin{aligned} &\text{I}\ .\ .\ X_1 - \frac{p_{2,1}}{P_2} X_2 - \frac{p_{3,1}}{P_3} X_3 - V_1 = 0 \\ &\text{II}\ .\ .\ X_2 - \frac{p_{1,2}}{P_1} X_1 - \frac{p_{3,2}}{P_3} X_3 - \frac{p_{5,2}}{P_5} X_5 - \frac{p_{6,2}}{P_6} X_6 - V_2 = 0 \\ &\text{III}\ .\ .\ X_3 - \frac{p_{1,3}}{P_1} X_1 - \frac{p_{2,3}}{P_2} X_2 - V_3 = 0 \\ &\text{V}\ .\ .\ X_5 - \frac{p_{2,5}}{P_2} X_2 - \frac{p_{6,5}}{P_6} X_6 - \frac{p_{7,5}}{P_7} X_7 - \frac{p_{8,5}}{P_8} X_8 - V_5 = 0 \\ &\qquad\qquad\text{і г. д.} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Абазначым:

$$\left.\begin{aligned} &\text{I}\ .\ .\ .\ k_{2,1} = \frac{p_{2,1}}{P_1}\,;\ k_{3,1} = \frac{p_{3,1}}{P_1}\,; \\ &\text{II}\ .\ .\ .\ k_{1,2} = \frac{p_{1,2}}{P_2}\,;\ k_{3,2} = \frac{p_{3,2}}{P_2}\,; \\ &\qquad\text{і г. д.} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Лічбы k, паказаныя ў радку I, у назоўніку якіх стаіць P_1, будзем называць чырвонымі лічбамі I-ага пункта; гэткія-ж лічбы ў радку II (у назоўніку іх P_2)—чырвонымі лічбамі II-га пункта і г. д.

З суадносін (14) вынікае, што сума чырвоных лічбаў кожнага пункта роўна адзінцы. Трэба яшчэ заўважыць, што, наогул кажучы, $k_{m,n} \neq k_{n,m}$.

Прымаючы пад увагу суадносіны (20) і тое, што $p_{m,n} = p_{n,m}$, перапішам нармальныя раўнанні (19) так:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I} \ldots X_1 - k_{1,2} X_2 - k_{1,3} X_3 - V_1 = 0 \\ \text{II} \ldots X_2 - k_{2,1} X_1 - k_{2,3} X_3 - k_{2,5} X_5 - k_{2,6} X_6 - V_2 = 0 \\ \text{III} \ldots X_3 - k_{3,1} X_1 - k_{3,2} X_2 - V_3 = 0 \\ \qquad\qquad \text{і г. д.} \end{array}\right\} \quad (21)$$

Палажыўшы з раўнання I:

$$X_1 = V_1 + X'_1, \quad (22)$$

выключым X_1 з ўсіх раўнанняў (21). Атрымаем новую сістэму:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I} \ldots X'_1 - k_{1,2} X_2 - k_{1,3} X_3 = 0 \\ \text{II} \ldots X_2 - k_{2,1} X'_1 - k_{2,3} X_3 - k_{2,5} X_5 - k_{2,6} X_6 - V'_2 = 0 \\ \text{III} \ldots X_3 - k_{3,1} X'_1 - k_{3,2} X_2 - V'_3 = 0 \\ \qquad\qquad \text{і г. д.} \end{array}\right\} \quad (23)$$

Тут мы ўвялі абазначэнні:

$$\left.\begin{array}{l} V'_2 = V_2 + k_{2,1} V_1 \\ V'_3 = V_3 + k_{3,1} V_1 \\ \quad \text{і г. д.} \end{array}\right\} \quad (24)$$

Новая сістэма (23) адрозніваецца ад сістэмы (21) толькі тым, што месца невядомага X_1 занята цяпер новым невядомым X'_1 і што свабодныя члены некаторых раўнанняў, іменна тых, у якія ўваходзіць X_1, змяніліся: свабодны член I-га раўнання стаў роўным нулю, а да свабодных членаў раўнанняў сумежных пунктаў прыбавіліся некаторыя часткі ад знішчанага свабоднага члена V_1.

Зрабіўшы гэта, пераходзім да якога-небудзь іншага раўнання, напр. да раўнання II. Палажыўшы:

$$X_2 = V'_2 + X'_2, \quad (25),$$

выключаем гэтае невядомае з усіх раўнанняў (23).

Атрымаем новую сістэму віда (21), але з невядомымі X'_1 і X'_2 замест невядомых X_1 і X_2 і з новымі свабоднымі членамі: свабодны член раўнання II-га стаў цяпер роўным нулю, а да свабодных членаў астатніх раўнанняў прыбавіліся некаторыя часткі ад V'_2.

Прарабіўшы тое-ж самае, паслядоўна, з астатнімі невядомымі, пяройдзем зноў да I-га раўнання, дзе атрымалася паўторная невязка V'_1 з перайшоўшых сюды частак свабодных членаў астатніх раўнанняў.

Палажыўшы цяпер:

$$X'_1 = V'_1 + X''_1, \tag{26}$$

праробім тое-ж самае, што і спачатку. Пяройдзем потым да другога раўнання і г. д. Дапасоўна да рысунка сеткі, мажліва, для нагляднасці, трактаваць апісаныя дзеянні з свабоднымі членамі раўнанняў як *паступовае раскідванне невязкі кожнага няцвёрдага пункта на суседнія пункты прапарцыянальна адпаведным чырвоным лічбам*. Раней мы ўжо адзначалі, што сума чырвоных лічбаў кожнага пункта роўна адзінцы. Адсюль вынікае, што паколькі нармальныя раўнанні складаюцца толькі для няцвёрдых пунктаў, знішчаемая невязка пяройдзе *поўнасцю* у свабодныя члены іншых раўнанняў толькі ў тым выпадку, калі па суседству з дадзеным пунктам няма ніводнага цвёрдага пункта. Улічваючы тое, што ва ўсякай сетці павінен быць хаця-бы адзін цвёрды пункт і што невязкі V маюць, наогул кажучы, розныя знакі [1]), мажліва сцвярджаць, што апісаны працэс *абавязкова* выразіцца ў тым, што свабодныя члены ўсіх нармальных раўнанняў будуць шпарка памяншацца і імкнуцца, на граніцы, да нуля. Да гэтай-жа граніцы будзе імкнуцца і значэнне папраўкі $X_i^{(k)}$ пры $k \longrightarrow \infty$.

Такім чынам, з раўнанняў (22), (26) і аналагічных ім далейшых раўнанняў атрымаем:

$$X_1 = V_1 + V'_1 + V''_1 + \cdots \tag{27}$$

Для астатніх невядомых будзем таксама мець:

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= V'_2 + V''_2 + \cdots\cdots \\ X_3 &= V'_3 + V''_3 + \cdots\cdots \\ &\text{і г. д.} \end{aligned}\right\} {}^{2)} \tag{28}$$

---

1) Не цяжка ўпэўніцца, што калі вылічыць невязкі V для ўсіх пунктаў, уключаючы і цвёрдыя, дык сума іх павінна строга раўняцца нулю.

2) Невязкі V_2, V_3 і інш. сюды не ўваходзяць, бо яны ўключаюцца у сімвалы V'_2, V'_3 і г. д. (гл. раўнанні 24).

Улічваючы, у сваю чаргу, паходжанне невязак V'_i, V''_i . . . , мажліва сказаць, што кожнае невядомае X_i раўняецца суме: першапачатковай невязкі V_i адпаведнага пункта і перайшоўшых да гэтага пункта, у працэсе выключэння невядомых, частак ад невязак сумежных (суседніх) няцвёрдых пунктаў.

Атрымаўшы такім чынам X_1, X_2, X_3 і г. д., вылічваем патрэбныя нам папраўкі x_1, x_2, x_3 і г. д. па формуле:

$$x_i = \frac{X_i}{P_i} \tag{29}$$

і канчатковыя ураўнаважаныя адзнакі па формуле:

$$H_i = A_i + x_i \tag{30}$$

Адзначым яшчэ, што пры раскладцы невязак парадак перахода ад аднаго пункта да другога тэорэтычна не мае ніякага значэння. Практычна-ж, у мэтах больш хуткага памяншэння невязак, карысна прытрымлівацца правіла: пераходзіць ад аднаго пункта да другога ў парадку крупнасці іх невязак, а іменна—ад большых невязак да меншых.

Для характарыстыкі дакладнасці зробленых вымераў трэба вылічыць сяр. кв. памылку адзінкі вагі па звычайнай формуле:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\delta^2]}{n-m}} \tag{31}$$

дзе δ—вызначаюцца па формулах (9), n—лік вымераных перавышкаў, m—лік няцвёрдых пунктаў.

Згодна раўнанняў (30) формулы (9) мажліва перапісаць так

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I—II} \;.\;. & H_1 + h_{1,2} - H_2 = \delta_{1,2} \\ \text{I—III} \;.\;. & H_1 + h_{1,3} - H_3 = \delta_{1,3} \\ \text{II—III} \;.\;. & H_2 + h_{2,3} - H_3 = \delta_{2,3} \\ & \text{і г. д.} \end{array}\right\} \tag{32}$$

Параўноўваючы гэта з формуламі (10), адзначаем, што величыні δ атрымоўваюцца аднолькава з невязкамі v; розніца толькі ў тым, што ў формулы для вылічэння v уваходзяць набліжаныя адзнакі А, тады як ў формулы (32)—ураўнаважаныя адзнакі Н.

Здабыткі $p\delta^2$, якія ўваходзяць у формулу (31), вылічваюцца звычайна так: спачатку атрымоўваюць і запісваюць усе δ^2, а потым $-p\delta^2$. Мы раім рабіць трохі інакш: вылічыць спачатку здабыткі $p\delta$, а потым $-p\delta \times \delta = p\delta^2$ (гл. графы 13, 14 і 15 ў табліцы № 3)[1]. Такім чынам, амаль без усякіх дадатковых вылічэнняў, мы будзем мець вельмі добры заключны кантроль усяго ўроўнаважвання. Кантроль гэты складаецца з таго, што для кожнага няцвёрдага пункта $[p\delta]$ павінна быць роўна нулю, у чым лёгка упэўніцца, калі ўзяць пад увагу, што сума велічынь $p\delta$, якія адносяцца да ўсіх ліній, выходзячых з дадзенага няцвёрдага пункта, уяўляюць сабой тое самае, што мы абазначалі раней літарай V, г. зн.—свабодныя члены нармальных раўнанняў, а гэтыя свабодныя члены, у працэсе уроўнаважвання, павінны быць зведзены да нуля.

У выпадку выяўлення памылкі, перарабляць усіх вылічэнняў не патрэбна—дастаткова раскідаць атрымаўшыяся паўторныя невязкі $V = [p\delta]$ такім-жа чынам, як былі раскіданы ў свой час першапачатковыя невязкі $V = [pv]$. У выніку гэтага адзнакі H атрымаюць невялічкія паўторныя папраўкі.

З формул (29) відаць, што абсалютныя пагрэшнасці папраўак x залежаць, пры аднолькавых астатніх умовах, ад P. Памылка ў папраўцы x_i —роўна памылцы ў невядомым X_i, падзеленай на P_i. Значыцца, для атрымання папраўак з пажаданай дакладнасцю, трэба выбраць належным чынам адзінку вагі[2]). Пажадана, каб пры раскладцы невязак да дэцыметра, вагі $P = [p]$ былі ў граніцах ад 3 да 10 адзінак. Пры гэткай умове памылкі вылічэння папраўак не будуць перавышаць 2—3 сантыметраў, што як-раз адпавядае дакладнасці геодэзічнага нівеліравання.

З прароблены намі прыкладаў відаць, што толькі пры адшуканні першага набліжэння даводзіцца аперавраць з двухзначнымі лікамі, для чаго мажліва скарыстаць звычайную 25 сантыметровую лёгарыфмічную лінейку альбо спецыяльныя табліцы множання (гл., напрыклад, табліцы, якія прыведзены ў маёй „Увязке полигонов", выд. 3, 1930 г., стар. 78—95). У другім і ў далейшых набліжэннях невязкі атрымоўваюцца, як правіла, адназначнымі і раскладка іх пропорцыянальна чырвоным лічбам лёгка вытвараецца без усякіх прылад (в уме).

Ніжэй мы прыводзім схемы вылічэнняў і лічбовыя прыклады. У памянёнай спачатку кнізе Н. А. Урмаева гаворыцца, што яго спосабам мажліва ўроўнаважыць сетку з дзесяці пунктаў на працягу рабочага дня. Колькасць часу ён лічыць пропорцыянальным ліку пунктаў. Выходзіць, што для уроўнаважвання яго спосабам сеткі з 6 няцвёрдых пунктаў патрабуецца каля 4-х гадзін. Наш спосаб патрабуе пры гэтых-жа ўмовах не больш двух гадзін, уключаючы час на вылічэнне вагаў, на заключны кантроль і на вылічэнне

---

[1]) Сумесныя вылічэнні $p\delta$ і $p\delta^2$—выконваюцца вельмі проста пры дапамозе звычайнай лёгарыфмічнай лінейкі.

[2]) Пры гэтым маецца на ўвазе, што невядомыя X вылічваюцца з поўнай абсалютнай дакладнасцю.

сярэдняй квадратычнай памылкі адзінкі вагі [1]). Цікава адзначыць, што на самае развязванне нармальных раўнанняў нашым спосабам паступовых набліжэнняў патрабуецца зусім мала часу, асабліва пры скарыстоўванні для гэтага схемы ў выглядзе рысунка (гл. рыс. 3). Сістэма з 6 раўнанняў развязваецца ў 10—15 мінут. Для 10 раўнанняў патрабуецца не больш поўгадзіны, тады як развязванне 10 раўнанняў звычайным шляхам патрабуе, згодна дадзеных В. В. Віткоўскага [2]), затраты цэлага рабочага дня.

V.

Звярнемся яшчэ раз да спосаба Анэра. На лічбовым прыкладзе з Вюртэмбергскай трыангуляцыі, узятым з „Handbuch der Vermessungskunde" Jordan'a-Eggert'a, Анэр паказвае, што ўроўнаважаная адзнака пункта роўна агульнай арыфметычнай сярэдзіне з тых яе прыватных значэнняў, якія атрымліваюцца шляхам перадачы ад усіх суседніх пунктаў праз іх найпраўдападобнейшыя адзнакі і вымераныя перавышкі. Давёўшы гэтае палажэнне ў агульным выглядзе, Анэр прыводзіць далей лічбовы прыклад на ўроўнаважванне часткі той-ж самай Вюртэмбергскай трыангуляцыі шляхам паслядоўнага дапасавання формулы агульнай арыфметычнай сярэдзіны. Яго схема уроўнаважвання амаль нічым не адрозніваецца ад схемы Н. А. Урмаева. Атрыманыя вынікі цалкам супадаюць з вынікамі уроўнаважвання спосабам найменшых квадратаў. Далей Анэр адзначае, што яго спосаб прыводзіць да мэты вельмі хутка, у *асабліва сці тады, калі ў сетцы ёсць толькі адзін цвёрды пункт* (курсіў наш).

Апошнія словы выклікаюць натуральнае неўразуменне: спосаб Анэра ўяўляе сабою, па сутнасці, спосаб пасрэдных наглядання́ў, пры якім, вядома уроўнаважванне выконваецца тым хутчэй, чым больш у сетцы цвёрдых пунктаў пры дадзенай агульнай колькасці ўсіх пунктаў—цвёрдых і няцвёрдых, а па Анэру выходзіць наадварот. У чым-жа тут справа? Справа ў тым, што Анэрам дапушчана сур'ёзная прынцыповая памылка. Давёўшы, што, уроўнаважаная адзнака няцвёрдага пункта роўна агульнай арыфметычнай сярэдзіне з усіх прыватных значэнняў гэтай адзнакі, вылічаных праз вымераныя перавышкі і праз уроўнаважаныя адзнакі ўсіх суседніх пунктаў (ўключаючы і цвёрдыя), Анэр, як відаць з яго лічбовага прыклада, зрабіў вывад, што і адзнака кожнага цвёрдага пункта павінна знаходзіцца ў гэткай-жа залежнасці *ад уроўнаважаных* адзнак суседніх з ім пунктаў. Не трудна давесці ў агульным выглядзе і праверыць на лічбо-

---

[1]) У Н.А. Урмаева ацэнка дакладнасці вымераў па выніках уроўнаважвання зусім адсутнічае.

[2]) В. В. Витковский. Практическая геодезия, 1911 г., стар. 535.

вых прыкладах, што гэтае палажэнне, наогул кажучы, няверкае. Уключэнне ў уроўнаважванне цвёрдых пунктаў на аднолькавых правах з пунктамі няцвёрдымі азначае, зразумела, зневажэнне іх „цвёрдасці“, што, ў перакладзе на мову метада умоўных наглядаанняў, роўнамоцна адкідванню часткі маючыхся ў сетцы умоўных раўнанняў.

Вядома, што пры ўроўнаважванні адзнак выбар пачатковага гарызонта не мае ніякага значэння, чаму адзнака аднаго пункта можа быць узята адвольна Гэтым і тлумачыцца тое, што ў лічбовым прыкладзе Анэра на уроўнаважванне сеткі, у якой ёсць т о л ь к і а д з і н цвёрды пункт, атрымаўся правільны вынік Калі-б ён уроўнаважыў па сваёй схеме сетку з н е к а л ь к і м і цвёрдымі пунктамі, то убачыў-бы, што вынік значна адрозніваецца ад таго выніка, які атрымліваецца спосабам найменшых квадратаў. Не цяжка зразумець, што калі з схемы Анэра выкінуць дзеянні, накіраваныя на тое, каб атрымаць „найпраўдападобнейшыя“ значэнні адзнак цвёрдых пунктаў, а ў астатніх дзеяннях замяніць набліжаныя адзнакі цвёрдых пунктаў іх наперад дадзенымі цвёрдымі значэннямі, тады вынік уроўнаважвання будзе зусім строгі. Так і зроблена, між іншым, у Н. А Урмаева.

Пры ўсім гэтым мы, зразумела, лічым, што адзнакі цвёрдых пунктаў з'яўляюцца сапраўды цвёрдымі, г. зн., што іх дакладнасць значна вышэй за дакладнасць вымярэння перавышкаў, якая дасягаецца пры дадзеным геодэзічным нівеліраванні.

У Анэра так іменна і ставіцца пытанне. Магчымы, аднак, выпадкі, калі некаторыя пункты трыангуляцыі маюць загадзя дадзеныя адзнакі, але дакладнасць гэтых адзнак не настолькі высокая, каб было магчыма лічыць іх цвёрдымі. Так, напрыклад, пры пабудове трыангуляцыі ніжэйшага класа на аснове некалькіх пунктаў вышэйшага класа, адзнакі апошніх бываюць часта атрыманы з геодэзічнага нівеліравання д о ў г і х ліній. Гэтыя адзнакі будуць мець дакладнасць значна ніжэй за тую, якая можа быць дасягнута пры геодэзічным нівеліраванні параўнальна кароткіх ліній дадзенай трыангуляцыі. У такім выпадку трэба рабіць уроўнаважванне, лічучы за цвёрды толькі адзін пункт, інакш найпраўдападобнейшых адзнак не атрымаецца. Пры гэтым усе дадзеныя адзнакі пунктаў папярэдняй трыангуляцыі, хаця для іх будуць атрыманы папраўкі, прыдзецца заставіць без змены, паколькі дадзенае уроўнаважванне было м я с ц о в ы м (местным), а не агульным уроўнаважваннем новай трыангуляцыі сумесна са ўсёй старой, і тым больш, што вынікі ранейшай трыангуляцыі маглі быць ужо ўключаны у каталогі і, наогул, належным чынам аформлены. У гэтым выпадку важна толькі не дапусціць зніжэння дакладнасці вынікаў дадзенай геодэзічнай нівеліроўкі з-за параўнальна вялікіх памылак ранейшай невіліроўкі. Таксама і наадварот,—пры наяўнасці ў сетцы с а п р а ў д ы ц в ё р д ы х пунктаў, неабходна весці уроўнаважванне выходзячы, з нязменнасці іх адзнак,—у адваротным выпадку таксама атрымаецца значнае зніжэнне дакладнасці канчатковых вынікаў.

Артыкул, ў якім Анэр падае свой метад, ён пачынае словамі: „Die unten beschriebene Ausgleichungsmethode gibt zwar dasselbe Ergebnisse wie die Methode der kleinsten Quadrate, es liegt ihr aber ein anderes Prinzip zu Grunde“ [1]). З выкладзенага відаць, што ў сапраўднасці справа абстаіць як раз наадварот: хаця ў аснове спосаба Анэра ляжыць той-жа самы прынцып, які ў аснове спосаба найменшых квадратаў, г. зн. прынцып арыфметычнай сярэдзіны, але вынік атрымліваецца іншы з прычыны няправільнага дапасавання гэтага прынцыпа. Супадзенне вынікаў мажліва толькі ў тым прыватным выпадку, які ўзяты Анэрам у яго лічбовым прыкладзе.

Далей (гл. стар. 31) мы дадзем вынікі уроўнаважвання спосабам Анэра сеткі, у якой маюцца два цвёрдыя пункты. У гэтым прыкладзе вынік атрымліваецца далёка не такі, як пры ўроўнаважванні спосабам найменшых квадратаў.

V.

Прыклад. Для больш нагляднага параўнання нашага спосаба са спосабам Н. А. Урмаева возьмем той жа самы лічбовы прыклад, які прыведзены ў яго кнізе. У гэтых-жа мэтах возьмем пакуль што і вагі перавышкаў такія, якія ўзяты ў яго.

Трэба уроўнаважыць адзнакі ў сетцы, якая пададзена на рыс. 2. Вылічэнні па гэтаму прыкладу зведзены ў адну схему (глядзі табліцу № 3). У адмену ад схемы Н. А. Урмаева наша схема ахоплівае ўсе вылічэнні, якія звязаны з уроўнаважваннем сеткі, уключаючы вылічэнне вагаў, вылічэнне сярэдняй квадратычнай памылкі адзінкі вагі і ўсе дапаможныя арыфметычныя дзеянні, як вылічэнне паасобных здабыткаў pv пры вызначэнні арыфметычнай сярэдзіны і г. д. У Н. А Урмаева гэтыя дзеянні робяцца па-засхемай, а вылічэнне сярэдняй квадратычнай памылкі зусім адсутнічае.

Пададзем некаторыя тлумачэнні да нашай схемы.

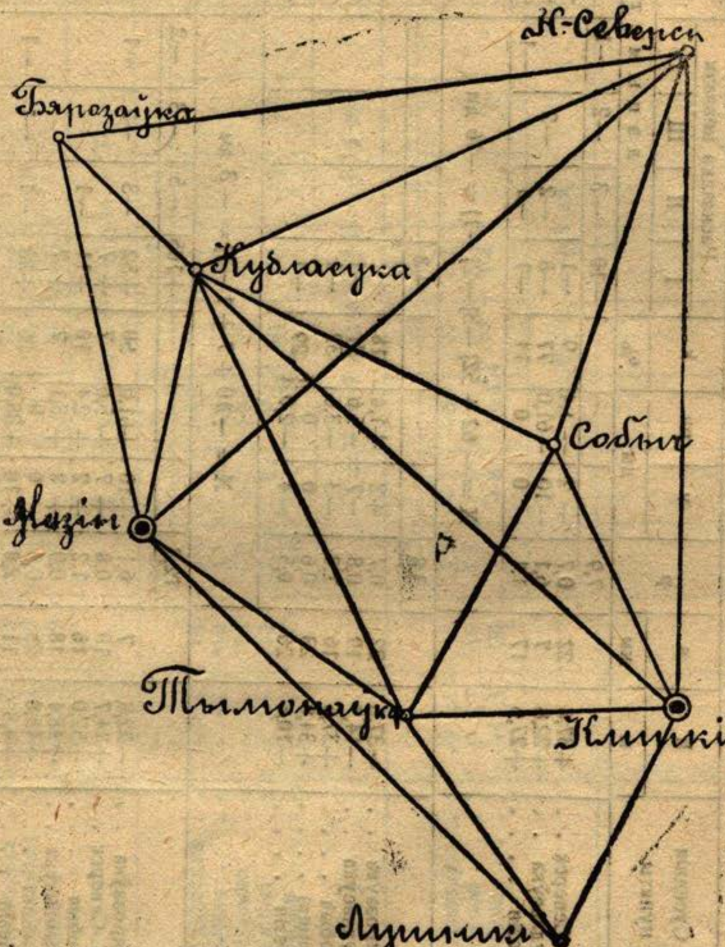
1) У графе 3 знакі перавышкаў адпавядаюць напрамку ад суседняга пункта да таго, які вызначаецца.

2) У графе 4 пішуцца даўжыні адпаведных бакоў сеткі у кілометрах.

3) У графу 5 заносяцца вагі, ўзятыя з табліцы № 1 альбо з табліцы № 2. У дадзеным прыкладзе, у мэтах больш нагляднага параўнання нашага спосаба са спосабам Урмаева, мы ўзялі, як сказана вышэй, такія-ж вагі, як і ў яго прыкладзе, лічучы

---

[1]) „Хаця апісаны ніжэй метад уроўнаважвання дае той-жа самы вынік, як і спосаб найменшых квадратаў, але ў яго аснове ляжыць другой прынцып“ (Z. f. V. 1926, стар. 65).



Рыс. 2.

Т а б л і ц а № 3. Tabelle № 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Пункт, які вызначаецца	Суседнія пункты	h	s	p	v	pv	k	Раскладка невязак				δ	pδ	pδ²
								I	II	III	IV			
		м	км		дм		%	дэцыметры						
				7,9				−10	−3	−2	−1			
Бярозаўка	Н.-Северск . .	+37,6	22	0,7	− 2	− 1,4	9	−1				−0,8	−0,6	0,5
	Кудлаеўка . .	+22,8	7	6,1	−10	−61,0	77	−8	−2	−2		−0,3	−1,8	0,5
A=222,60	Мезін	+27,6	17	1,1	0	0	14	−1	−1		−1	+2,0	+2,2	4,4
x= −0,20				X = − 62 + 52] −3] −2] −1] = −16 дм									−0,2	
H=222,40														
				3,8				−3						
Н.-Северск	Бярозаўка . .	−37,6	22	0,7	+2	+1,4	18					+0,8	+0,6	—
	Кудлаеўка . .	−14,7	19	0,8	−7	−5,6	21	−1				+1,5	+1,2	1,8
	Собыч	+37,5	16	1,2	−3	−3,6	32	−1				−0,8	−1,0	0,8
	Клішкі	+34,8	23	0,6	0	0	29	−1				+0,8	+0,5	0,4
	Мезін	−10,6	26	0,5	−4	−2,0						−3,2	−1,6	5,1
A=184,80														
x= −0,08				X = − 10 + 7 + 1 −1] = − 3 дм									−0,3	
H=184,72														
				12,3				+105	−5	−3	−2			
Кудлаеўка	Бярозаўка . .	−22,8	7	6,1	+10	+61,0	50	+52	−3	−2	−1	+0,3	+1,8	—
	Н.-Северск . .	+14,7	19	0,8	+ 7	+ 5,6	7	+ 7				−1,5	−1,2	—
	Собыч	+52,0	16	1,2	+ 2	+ 2,4	10	+11	−1			−4,3	−5,2	22,4
	Тымонаўка . .	+48,4	18	0,9	+ 9	+ 8,1	7	+ 7				+2,4	+2,2	5,3
	Клішкі	+48,8	25	0,5	0	0	26	+28	−1	−1	−1	−7,7	−3,8	29,3
	Мезін	+4,8	11	2,8	+10	+28,0						+2,3	+6,4	14,7
A=198,80														
x= +0,77														
H=199,57				X = + 105] + 2 +1 − 8] −1 −2] −2] = +95 дм									+0,2	

Собыч				9,5				+12	+1					
	Н.-Северск . .	−37,5	16	1,2	+3	+3,6	12	+1				+0,8	+1,0	—
	Кудлаеўка . .	−52,0	16	1,2	−2	−2,4	13	+2				+4,3	+5,2	—
	Тымонаўка . .	− 4,3	10	3,4	0	0	36	+4	+1			−0,3	−1,0	0,3
A=147,00	Клішкі	− 3,0	9	3,7	0	0	39	+5				−1,4	−5,2	7,3
x = +0,14 H=147,14				X = + 1 + 11] + 3−1 −1] = + 13 дм									0	
Тымонаўка				12,6				+12	+1	+1				
	Кудлаеўка . .	−48,4	18	0,9	−9	−8,1	7	+1				−2,4	−2,2	—
	Собыч	+ 4,3	10	3,4	0	0	27	+3				+0,3	+1,0	—
	Лушнікі . . .	− 1,4	10	3,2	+2	+6,4	25	+3				+1,3	+4,2	5,5
	Клішкі	+ 1,3	12	2,4	0	0	41 (Клішкі, Мезін)	+5	+1	+1		−1,1	−2,6	2,9
A=151,30	Мезін	−43,6	11	2,7	+1	+2,7						−0,1	−0,3	0,0
x= +0,11 H=151,41				X = +1 +7 +4] +1] +1] = +14 дм									+0,1	
Лушнікі				6,8				+3						
	Тымонаўка . .	+ 1,4	10	3,2	−2	−6,4	47	+1				−1,3	−4,2	—
	Клішкі	+ 2,9	10	2,8	0	0	53 (Клішкі, Мезін)	+2				−0,4	−1,1	0,4
A=152,90	Мезін	−41,3	20	0,8	+8	+6,4						+7,6	+6,1	46,4
x= +0,04 H=152,94				X = 0 + 3] = + 3 дм									+0,8	
Клішкі H=150,00														
Мезін H=195,00														

$[p\delta^2] = 148$

$n = 18$

$m = 6$

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\delta^2]}{n-m}} = \sqrt{\frac{148}{18-6}} = \pm 0{,}35\text{м.}$$

(для $S_1 = 17{,}6$ км)

іх умоўна вернымі. Далей, у табліцы № 4 у графе 6 будуць дадзены вынікі уроўнаважвання, пры якім прыняты больш строгія вагі, вылічаныя па формуле (2). Для кожнага вызначаемага пункта падлічана $P = [p]$ і запісана вышэй адпаведнага слупка.

4) Набліжаныя адзнакі A', запісаныя у графе 1, атрыманы так: для Бярозаўкі—з цвёрдага пункта Мезін, а для астатніх—з другога цвёрдага пункта Клішкі. Для Бярозаўкі, напрыклад, маем:

$$A = 195{,}00 + 27{,}6 = 222{,}6.$$

Парадак і спосаб вызначэння набліжаных адзнак тэорэтычна не мае значэння; практычна-жа, у мэтах атрымання больш дробных паправак, раіцца перадаваць адзнакі непасрэдна з цвёрдых пунктаў па найбольш кароткіх лініях.

5) Невязкі v, якія запісаны ў графе 6, вылічаны пры дапамозе формул (10) па дадзеных 1 і 3 граф. Для Бярозаўкі, напрыклад, па лініі Н. Северск—Бярозаўка маем:

$$v = 184{,}8 + 37{,}6 - 222{,}6 = -0{,}2 \text{ м} = -2 \text{ дм}.$$

6) У графе 7 запісаны, з дакладнасцю да 0,1 дм, здабыткі pv, а таксама і „невязкі пунктаў" $V = [pv]$, акругленыя да 1 дм. Для пункта Бярозаўка, напрыклад, маем: $V = -1{,}4 - 61{,}0 = -62$ дм.

7) Далей вылічаны у процантах, з дакладнасцю да 1%, ч ы р в о н ы я л і ч б ы k, г. зн. стасункі вагаў p, да адпаведнага P. Для лініі Бярозаўка—Н.-Северск, напрыклад, маем $k = \frac{70}{7{,}9} = 9$ процантаў. Сума чырвоных лічбаў, якія датычацца да кожнага пункта, павінна быць роўна 100 (кантроль). Калі па суседзтву з якім-небудзь няцвёрдым пунктам ёсць некалькі цвёрдых пунктаў, тады для іх вылічваецца адна сумарная чырвоная лічба, якая патрэбна толькі для кантроля. Так, напрыклад, для пункта Н.-Северск па напрамках на цвёрдыя пункты Клішкі і Мезін маем:

$$k = \frac{(0{,}6 + 0{,}5)\,100}{3{,}8} = 29$$

8) Потым, у адпаведнасці з тлумачэннямі, якія прыведзены вышэй, робім раскладку невязак у парадку іх буйнасці. У дадзеным прыкладзе пачынаем з пункта Кудлаеўка. Запісаную пры гэтым пункце ў графе 7 невязку $V = +105$ дм адкрэсліваем дужкай і перапісваем у верхні радок графы 9. Узяўшы далей, у адпаведнасці з чырвонымі лічбамі пункта Кудлаеўка: 50%, 7%, 10%, 7% і 26% ад гэтай невязкі, пішам атрыманыя часткі ў адпаведных радках у той-жа самай графе 9, а іменна: супроць Бярозаўкі—50% ад $+105$ дм $= +52$ дм, супроць Н.-Северска—7%,

ад + 105 дм = + 7 дм і г. д. Для кантроля зваараем суму ўсіх частак з агульнай невязкай +105. Далей перапісваем усе гэтыя часткі да невязак пунктаў, суседіх з Кудлаеўкай. Лічбу + 52, напрыклад, пішам у ніжнім з тых радкоў, якія адведзеы для „вызначаемага пункта“ Бярозаўка; лічбу + 7 перапісваем да невязкі пункта Н.-Северск і г. д. Невязкі на гэтых пуктах цяпер ужо будуць: на Бярозаўцы — —62 +52 = — 10, на Н.-Северску— — 10 + 7 = — 3 і г. д.

9) Пасля гэтага пераходзім да пункта Собыч. Адкрэсліваем дужкай яго невязку + 1 + 11 = + 12 дм, перапісваем яе ў верхні радок у графу 9, раскідываем пропорцыянальна чырвоным лічбам на ўсе суседнія пункты і прыпісваем часткі, якія атрымаліся: +1 дм—да невязкі пункта Н.-Северск, +2 дм—да невязкі пункта Кудлаеўка і г. д.

У мэтах практычнага асваення дадзенага способа карысна прасачыць па нашаму прыкладу раскладку невязак да самага канца. Наогул, нам давялося зрабіць раскладку 15 невязак у наступным парадку:

1. Кудлаеўка	+ 105	дм
2. Собыч	+ 12	„
3. Тымонаўка	+ 12	„
4. Бярозаўка	— 10	„
5. Кудлаеўка	— 5	„
6. Лушнікі	+ 3	„
7. Н.-Северск	— 3	„
8. Бярозаўка	— 3	„
9. Кудлаеўка	— 3	„
10. Бярозаўка	— 2	„
11. Кудлаеўка	— 2	„
12. Тымонаўка	+ 1	„
13. Собыч	+ 1	„
14. Бярозаўка	— 1	„
15. Тымонаўка	+ 1	.

З гэтых дзеянняў толькі першыя тры могуць патрабаваць ужывання лёгарыфмічнай лінейкі альбо спецыяльнай таблічкі процантаў; усе-ж астатнія лёгка выконваюцца без усякіх прылад (в уме) і патрабуюць усе разам затраты якіх-небудзь 4—5 мінут.

Пры гэтым трэба напомніць, што пры развязванні нармальных раўнанняў нашым метадам паступовых набліжэнняў мы лічым за невядомыя не самыя папраўкі x, а здабыткі Px, дзе лічбы P у сярэднім каля 10. У выніку гэтага раскладка невязак V з дакладнасцю да дэцыметра дае магчымасць вызначыць папраўкі адзнак з памылкай парадка 1—2 сантыметраў, г. зн. больш дакладна, чымся гэта зроблена у Н. А. Урмаева.

10) Скончыўшы раскладку невязак, вызначаем для кожнага пункта велічыню

$$X = [V]$$

Для кантроля магчыма атрымаць яе два разы: як суму лічбаў верхняга радка і як суму лічбаў ніжняга радка пры адпаведным пункце. Так, напрыклад, для Бярозаўкі маем:

$$X = -10 - 3 - 2 - 1 = -16 \text{ дм.},$$

альбо:

$$X = -62 + 52 - 3 - 2 - 1 = -16 \text{ дм.}$$

11) Вызначаем далей для кожнага няцвёрдага пункта

$$x = \frac{X}{P}$$

Для Бярозаўкі, напрыклад, атрымліваем:

$$x = \frac{-16 \text{ дм}}{7{,}9} = -0{,}20 \text{ м.}$$

Запісаўшы ўсе *x* у графу 1, прыкладаем іх да адпаведных набліжаных адзнак A і атрымліваем канчатковыя ураўнаважаныя адзнакі H.

12) Пад канец, у графах 13, 14 і 15 вытвараем вылічэнне μ, г. зн. сяр. кв. памылкі адзінкі вагі, па формуле (31), і, разам з гэтым, робім заключны кантроль для кожнага пункта паасобку па формуле:

$$[p\delta] = 0$$

Велічыні δ (графа 13 схемы) вылічаем згодна раўнанняў (32), г. зн. такім-жа чынам, як раней вылічваліся невязкі v (графа 6), толькі замест набліжаных адзнак A няцвёрдых пунктаў трэба, на гэты раз, браць іх ураўнаважаныя адзнакі H. Так, напрыклад, для пункта Бярозаўка па напрамку ад Н.-Северска маем:

$$\delta = 184{,}72 + 37{,}6 - 222{,}40 = -0{,}08 \text{ м} = -0{,}8 \text{ дм.}$$

Зразумела, што для падстаноўкі ў формулу:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\delta^2)}{n-m}}$$

здабыткі $p\delta^2$ бяруцца толькі па аднаму разу для кожай лініі, чым і тлумачацца пропускі у графе 15 схемы.

У выніку кантроля па формуле $[p\delta] = 0$ могуць быць тры выпадкі:

а) Кантрольныя лічбы $[p\delta]$ па ўсіх пунктах меньш за 1 дм. У гэтым выпадку вылічэнні трэба прызнаць досыць дакладнымі.

б) Калі $[p\delta]$ атрымліваецца парадку 1—2 дм, тады да адзнакі адпаведнага пункта трэба прыбавіць дадатковую папраўку:

$$x' = \frac{[p\delta]}{P}$$

в) Калі адна альбо некалькі катрольных лічбаў $[p\delta]$ будуць 3 дм ці больш, г. зн. будзе выяўлена грубая памылка,—перарабляць вылічэнняў усё-ж не патрэбна,—неабходна будзе зрабіць толькі дадатковую раскладку новых невязак $V' = [p\delta]$ такім-жа чынам, як было зроблена з першапачатковымі невязкамі V. У выніку гэтай дадатковай раскладкі прыдзецца прыбавіць да адзнак H дадатковыя папраўкі.

VI.

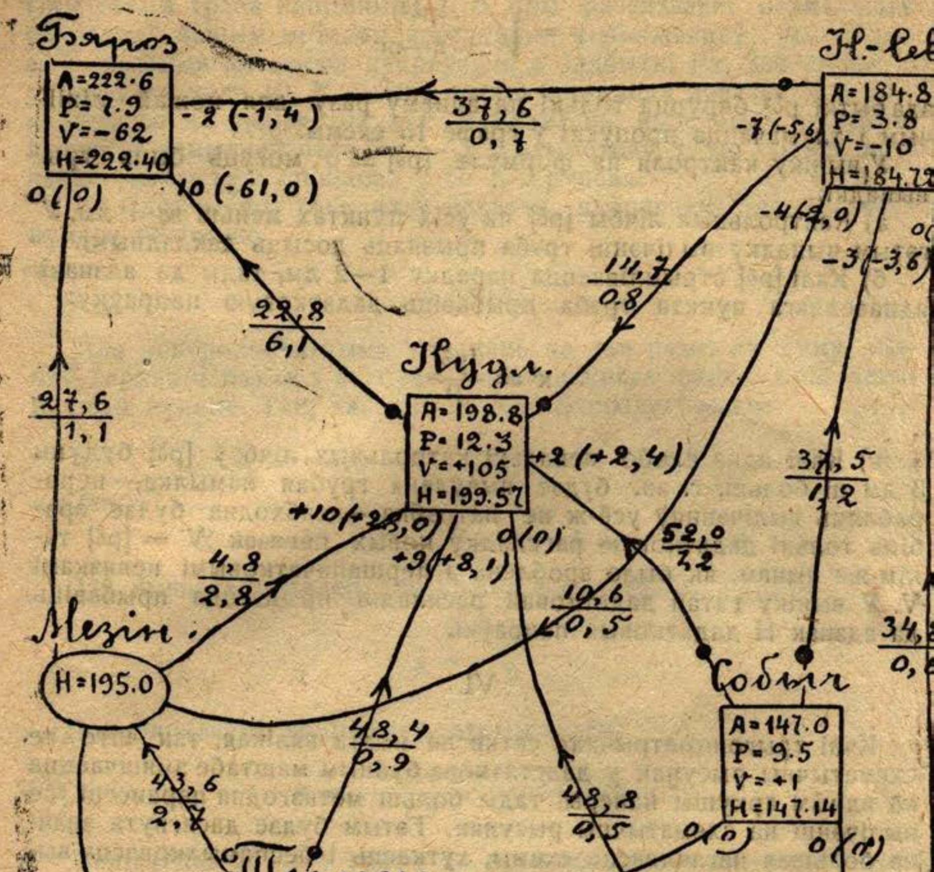
Калі трыгонометрычная сетка не надта вялікая, так што яе схематычны рысунак у дадстаткова буйным маштабе змяшчаецца на адным аркушы паперы, тады больш метазгодна перанесці ўсе вылічэнні на схематычны рысунак. Гэтым будзе дасягнута значна большая нагляднасць схемы, хуткасць і беспамылковасць вылічэнняў.

Усе вылічэнні змяшчаюцца у гэтым выпадку на двух схематычных рысунках. Паяснім парадак гэтых вылічэнняў.

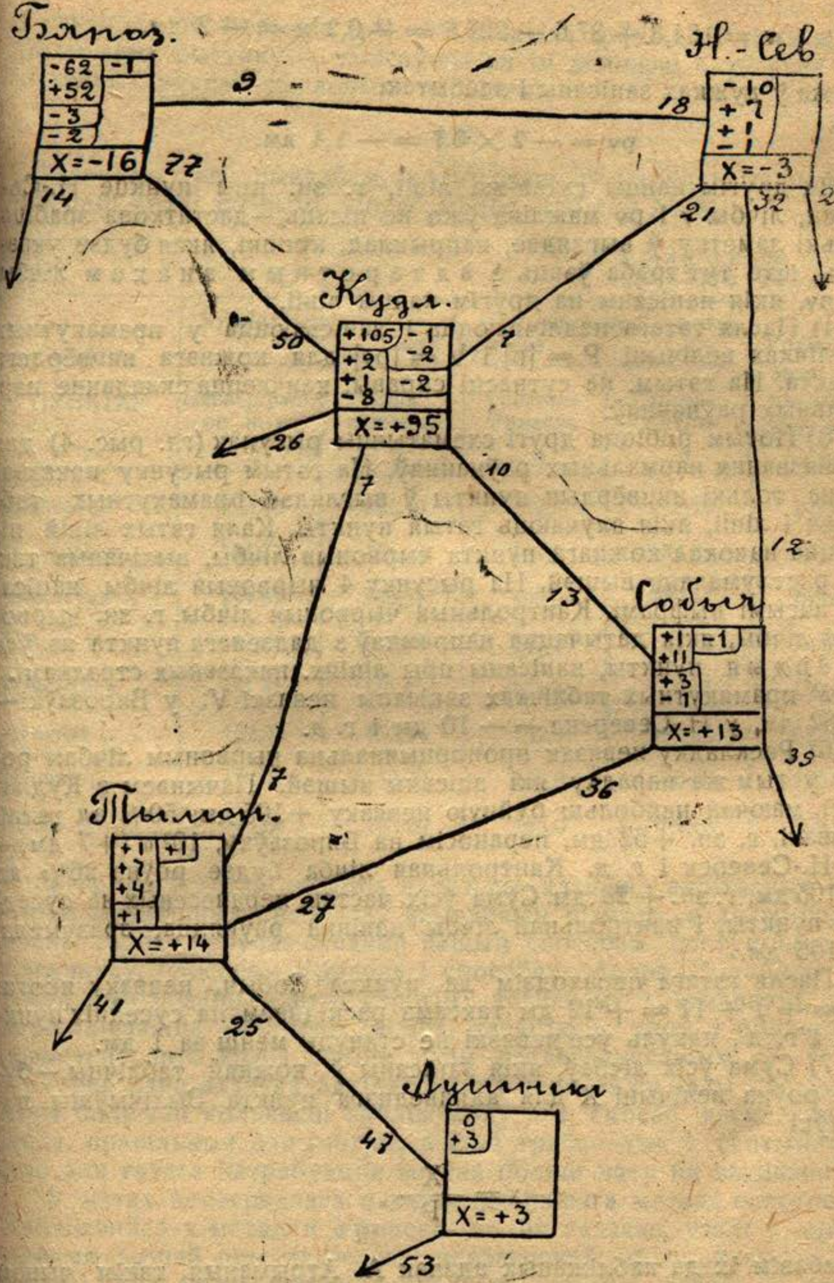
1) На першым рысунку (гл. рыс. 3) прамакутныя таблічкі ізабражаюць няцвёрдыя пункты, а эліпсы — цвёрдыя пункты. Пункты, паміж якімі вытваралася непасрэдная перадача адзнак, злучаны простымі альбо крывымі лініямі. Каля сярэдзіны кожнай лініі пішуцца ў выглядзе дроба: у лічніку перавышкі, а ў назоўніку іх вагі. Стрэлкі паказваюць напрамак дадатных перавышкаў.

2) Вылічваюцца, як і ў папярэдняй схеме, набліжаныя адзнакі А для кожнага няцвёрдага пункта. Гэтыя адзнакі пішуцца ў адпаведных таблічках.

3) Далей, непасрэдна па рысунку вылічваюцца невязкі **v** і здабыткі pv і пішуцца ў пачатку кожнай лініі пры адпаведным пункце. Пры пункце Бярозаўка, напрыклад, па напрамку Н. Северск—Бярозаўка, маем:


Бяроз
A=222.6
P=7.9
V=-62
H=222.40
-2 (-1,4)
37,6
0,7
Н.-Сев
A=184.8
P=3.8
V=-10
H=184.72
-7(-5,6)
0(0)
10 (-61,0)
-4(-2,0)
-3(-3,6)
11,7
0.8
22,8
6,1
Кудл.
A=198.8
P=12.3
V=+105
H=199.57
+2 (+2,4)
27,6
1,1
37,5
1,2
+10(+23,0)
0(0)
+9(+8,1)
52,0
2,2
4,8
2,8
10,6
0,5
Мезін.
H=195.0
Собыч
A=147.0
P=9.5
V=+1
H=147.14
48,4
0,9
43,6
2,7
48,8
0,5
0(0)
Тимон.
+1(+2,7)
A=151.3
P=12.6
V=+1
H=151.41
4,3
3,4
3,0
3,7
0(0)
+2(+6,4)
Клінкі
H=150.0
41,3
0,8
1,3
2,4
1,4
3,2
Лунінкі
A=152.9
P=6.8
V=0
H=152.94
2,9
2,8
0(0)
+8 (+6,4)

Рыс. 3.


Бяроз.
-62
-1
+52
-3
-2
X=-16
Н.-Сев
-10
+7
+1
-1
X=-3
Кудл.
+105
-1
-2
+2
+1
-8
-2
X=+95
Собыч
+1
-1
+11
+3
-1
X=+13
Тымон.
+1
+1
+7
+4
+1
X=+14
Лушнікі
0
+3
X=+3
9
18
77
14
21
32
29
50
7
26
7
10
12
13
39
7
36
27
41
25
47
53

Рыс. 4.

$$v = 184{,}8 + 37{,}6 - 222{,}6 = -0{,}2 \text{ м} = -2 \text{ дм.}$$

Там-жа ў дужках запісаны і здабытак:

$$pv = -2 \times 0{,}7 = -1{,}4 \text{ дм.}$$

На другім канцы гэтай-жа лініі, г. зн. пры пункце Н.-Северск, лічбы v і pv мажліва ўжо не пісаць,—дастаткова зрабіць толькі заметку ў выглядзе, напрыклад, кропкі, якая будзе указваць, што тут трэба ўзяць з адваротным знакам лічбы v і pv, якія напісаны на другім канцы лініі.

4) Пасля гэтага падлічваюцца і запісваюцца у прамакутных таблічках велічыні $P = [p]$ і $V = [pv]$ для кожнага няцвёрдага пункта. На гэтым, па сутнасці справы, канчаецца складанне нармальных раўнанняў.

5) Потым робіцца другі схематычны рысунак (гл. рыс. 4) для развязвання нармальных раўнанняў. На гэтым рысунку паказваюцца толькі няцвёрдыя пункты ў выглядзе прамакутных таблічак і лініі, якія злучаюць гэтыя пункты. Каля гэтых ліній пішуцца навокал кожнага пункта чырвоныя лічбы, вылічаныя так, як растлумачана вышэй. На рысунку 4 чырвоныя лічбы напісаны касымі цыфрамі. Кантрольныя чырвоныя лічбы, г. зн. чырвоныя лічбы, якія датычацца напрамкаў з дадзенага пункта на ўсе цвёрдыя пункты, напісаны пры лініях, паказаных стрэлкамі.

У прамакутных таблічках запісаны невязкі V: у Бярозаўкі— — 62 дм, у Н.-Северска — — 10 дм і г. д.

6) Раскладку невязак пропорцыянальна чырвоным лічбам робім у тым жа парадку, які апісаны вышэй. Пачынаем з Кудлаеўкі, маючай найбольш буйную невязку +105 дм; 50% ад гэтай невязкі, г. зн. +52 дм, пераносім на Бярозаўку, 10% (+7 дм)— на Н.-Северск і г. д. Кантрольная лічба будзе роўна 26% ад + 105 дм, г. зн. + 28 дм. Сума ўсіх частак, перанесеных на суседнія пункты, і кантрольнай лічбы павінна раўняцца, зразумела, + 105 дм.

Пасля гэтага пераходзім да пункта Собыч, невязку якога: $V' = +1 + 11 = +12$ дм таксама раскідваем па суседніх пунктах і г. д., пакуль усе невязкі не стануць менш за 1 дм.

7) Сума ўсіх лічбаў, якія запісаны ў кожнай таблічцы,—будзе роўна велічыні X для адпаведнага пункта. Вылічыўшы папраўкі

$$x = \frac{X}{P},$$

прыбавім іх да набліжаных адзнак A. Атрыманыя такім чынам уроўнаважаныя адзнакі H напісаны у прамакутных таблічках на рысунку 3.

8) Вылічэнне сярэдняй квадратычнай памылкі адзінкі вагі μ

і кантроль па формуле $[p\delta] = 0$ мажліва зрабіць па таму-ж схэматычнаму рысунку 3, запісаўшы на ім велічыні δ, $p\delta$ і $p\delta^2$ у адпаведных месцах чырвонымі чарнілямі.

VII.

У заключэнне прывядзем зводку вынікаў уроўнаважвання ўзятай намі сеткі рознымі спосабамі (гл. табліцу № 4).

Табліца № 4.
Tabelle № 4.

НАЗВА ПУНКТАЎ	Уроўнаважаныя адзнакі, атрыманыя пры сыстэме вагаў Урмаева				Ураўн. адзнакі пры нашай сыстэме вагаў
	Непаср. раш. сп. н. кв.	Наша рашэнне	Рашэнне Урмаева	Рашэнне Анэра	
1	2	3	4	5	6
Бярозаўка . .	222,40	222,40	222,3	222,16	222,47
Н.-Северск . .	184,71	184,72	184,7	184,55	184,74
Кудлаеўка . .	199,57	199,57	199,6	199,34	199,66
Собыч	147,14	147,14	147,1	147,04	147,10
Тымонаўка . .	151,41	151,41	151,4	151,27	151,40
Лушнікі . . .	152,95	152,94	152,9	152,82	152,88
Клішкі	150,00	150,00	150,0	150,00	150,00
Мезін	195,00	195,00	195,0	194,66	195,00

У графе 2 гэтай табліцы паказаны адзнакі, атрыманыя спосабам найменшых квадратаў звычайным шляхам, а далей прыведзены вынікі уроўнаважвання нашым спосабам паступовых набліжэнняў, спосабам Урмаева і спосабам Анэра. З табліцы відаць, што розніцы паміж строгімі адзнакамі і адзнакамі, якія атрымліваюцца спосабам Анэра, дасягаюць трох і больш дэцыметраў, што трэба лічыць зусім нездавальняючым. У Н. А. Урмаева адна адзнака адхіляецца ад строгай на цэлы дэцыметр. Пры большай колькасці набліжэнняў яго спосаб дасць, зразумела, правільныя дэцыметры, а калі трэба—дык і сантыметры, але для гэтага патрабуецца значна больш часу на вылічэнні.

У мэтах непасрэднага параўнання нашага метада паступовых набліжэнняў з метадам Урмаева мы, як сказана, узялі ў прыведзеным вышэй прыкладзе вагі перавышкаў аднолькавыя з яго вагамі. Калі ўзяць больш дакладныя значэнні вагаў па нашай табліцы № 1, тады атрымліваюцца уроўнаважаныя адзнакі, якія прыведзены ў тэй-ж табліцы № 4 ў графе 6. Супастаўляючы лічбы графы 6 і графы 2, мажліва заўважыць, што недакладнае вызначэнне вагаў выклікае памылкі парадка аднаго дэцыметра. У перавышку паміж пунктамі Кудлаеўка і Собыч гэтая памылка дасягае 0,13 м. Калі ўлічыць тое, што гутарка ідзе аб памылцы, якая выклікаецца толькі аднэй з многіх прычын, а іменна—недакладным вызначэннем вагаў пры уроўнаважванні,—дык прыходзіцца прызнаць, што вагі трэба вызначаць па нашых формулах (3) і (4), тым больш, што пры наяўнасці адпавядаючых гэтым формулам табліцак №№ 1 і 2, вызначэнне строгіх вагаў ніякіх дадатковых цяжкасцей не прадстаўляе.

PROF. W. W. POPOW.

Die Ausgleichung von Höhen bei trigonometrischen Höhenmessungen

(Zusammenfassung)

Es sind schon mehr als zehn Jahr vergangen seit von mir spezielle Verfahren zur Ausgleichung von unabhängig gemessenen Grössen, deren Summen aus theoretischen Voraussetzungen bekannt sind, ausgearbeitet worden sind und weite Verbreitung in der Praxis gefunden haben. Diese Verfahren sind, unter anderem, in meiner Schrift „Увязка полигонов“ (die Ausgleichung von Polygonen) niedergelegt. Sie beziehen sich, natürich, auch auf eine Ausgleichung von Höhen bei trigonometrischen Höhenmessungen und geben stets Resultate, welche der Methode der kleinsten Quadrate streng entsprechen.

In meines «Ausgleichung von Polygonen“ ist, unter anderem, ein besonderes „Knotenpunktverfahren“ mit der Lösung von Normalgleichungen vermittelst schrittweiser Annäheruugsmethoden ausgeführt. In dem unlängst erscheinenen Werke von N. A. Urmajew „Руководство по обработке триангуляций“ (Handbuch für Bearbeitung der Triangulation), Moskau, 1932, und ausserdem in einer Abhandlung von Major Hjalmar Anér, Stockholm,[1]) wird ebenfalls ein besonderes von H. Anér ausgearbeitetes Verfahren von schrittweisen Annäherungen, das auch zur Ausgleichung von Höhen bei trigonometrischen Höhenmessungen Verwendung finden, angeführt.

In Rücksichtsnahme auf das höhe Interesse für die vorliegende Frage, welches durch das Werk von N. A. Urmajew und insbesondere durch die günstige Rezension dieser Arbeit von Prof. Th. N. Krassowsky[2]) hervorgerufen worden ist, berücksichtige ich vornehmlich in vorliegender Arbeit die Frage einer unvermittelten Verwendung des von mir vorgeschlagenen Verfährens der schriftweisen Annäherungen zur Ausgleichung der Resultate trigonometrischer Höhenmessungen.

Die theoretische Begründung meiner „Knotenpunkmethode“ wird hier einigermassen anders, als in meiner „Ausgleichung der Poly-

---

[1]) „Zeitschrift für Vermessungswesen“, 1926, S. 65—77.
[2]) „Geodesist“ 1932, № 9—10, S, 79—82.

gone", ausgeführt. Es werden neue Schemen der Berechnungen,—speziell angepasst an die Ausgleichung der Ergebnisse der trigonometrischen Höhenmessung,—und desgleichen—eine theoretische Begründung derjenigen Art der Methode der schrittweisen Annäherungen, welche, unserer Ansicht nach, am vollkommensten den Eigentümlichkeiten der trigonometrischen Höhenmessung entspricht, angeführt.

Bei der Berechnung aller Annäherungen, ausser der ersten, haben wir es hier blos mit geringen Verbesserungsgliedern zu tun, während N. A. Urmajew bei jeder Annäherung von Neuem die Höhen, d. h. 3—5-stellige Zahlen zu berechnen hat.

Zu der Berechnung einer jeden Annäherung dieser oder jener Ordnung der Höhen eines gegebenen Punktes benutzen wir, in Abweichung von Urmajew und Anér, alle schon früher erhaltenen Annäherungswerte derselben Ordnung der Höhen der benachbarten Punkte, infolge wessen die Konvergenz der Annäherungen bei uns bedeutend schneller (annähernd um das Doppelte) vor sich geht.

Die Gewichte der Höhenunterschiede bestimme ich mit Berücksichtigung der Fehlerhaftigkeit des Strahlenbrechungskoëffizienten. Hiezu dienen die Tabellen № 1 und № 2, welche in Anpassung an die Formeln (3) und (4) zusammengestellt sind.

Für die Ausgleichung haben wir folgende Bezeichnungen angenommen:

A_i —die Annäherungshöhe der Punktes Nummer i;

H_i —die endgültige ausgeglichene Höhe;

x_i —die Verbesserung, welche zum Annäherungswerte der Höhe hiuzugefügt wird, um die endgültige Höhe zu erhalten;

$h_{i,k}$—der gemessene Höhenunterschied auf der Geraden vom Punkte Nummer i zum Punkte Nummer k;

$p_{k,i}$—das Gewicht des Höhenunterschiedes $h_{k,i}$.

Die Bedeutung der Hilfswerte: δ, v, P, V, X und k erhellt aus den Beziehungen (9), (10), (14), (15), (17) und (20).

Die Fehlergleihungen auf gewönlichem Wege, in Anpassung an die Abbildung 1, zusammenstellend, gingen wir von ihnen zu den Normalgleichungen (13) über. Mit Hilfe geringer Umgestaltungen und mit Verwendung der oben angegebenen Bezeichnungen wurden die Normalgleichungen zur Form (21) übergeführt. In dieser Gestalt führen wir sie auch nach der Annäherungsmethode zur endgültigen Lösung.

Die Lösung wird von uns entweder nach dem Schema in den Art der Tabelle № 3 (SS. 22—23) oder in der Art zweier schematischer Zeichnungen: № 3—zur Zusammenstellung von Normalgleichungen und № 4—zu ihrer Auflösung, ausgeführt.

In der Tabelle № 4 geben wir eine Zusammenstellung der Ergebnisse der Ausgleichung ein und desselben Netzes nach den verschiedenen Methoden.

Das verfahren von H. Anér ergibt bedeutende Abweichungen von der strengen Lösung infolge einer fehlerhaften Einführung von festen Punkten in die Ausgleichsberechnungen unter gleichen Bedingungen wie auch die von nichtfesten Punkten. Ueber Fälle, wann ein solches Verfahren zulässig ist und wann nicht zu gestatten wird eingehend im Kap. IV unserer Abhandlung gesprochen.

Die Zusammenstellung und Lösung von 6 Normalgleichungen nach unserem Verfahren, einbezüglich von Kontrolberechnungen und der Genauigkeitsbestimmung, beansprucht etwa 2 Stunden Zeit. Die Lösung der Gleichungen selbst ist in 10—15 Minuten auszuführen.

Е. Г. ЛАРЧАНКА.

АБ ДАКЛАДНАСЦІ ВЫЛІЧЭННЯ ПЛОШЧАЎ І ДАПАСАВАННІ ЛАГАРЫФМІЧНАЙ ЛІНЕЙКІ ПРЫ ІХ ВЫЛІЧЭННІ.

§ 1. У падручніках па геадэзіі [1]) указваецца, што з дапамогаю планіметра можна вылічыць плошчу з дакладнасцю да 0,1% для простага планіметра Карадзі і з дакладнасцю да 0,02% для прэцызійнага планіметра, а для плошчаў, большых 200 кв. см, дакладнасць вылічэння можа быць яшчэ вышэй.

Ніжэй прыведзеныя меркаванні даюць падставу сцвярджаць, што дакладнасць вылічэння плошчаў усялякіх размераў, нават прэцызійнымі планіметрамі, не можа быць вышэй 0,1%.

Дакладнасць вылічэння плошчы планіметрам залежыць ад шэрага прычын, у тым ліку і ад дакладнасці вызначэння цаны аднаго падзела планіметра, на што часта не звяртаецца увагі. Цана аднаго падзела планіметра вызначаецца альбо з дапамогаю кантрольнай лінеечкі, альбо па плошчы якой-небудзь правільнай фігуры, таму патрэбна знайсці дакладнасць вызначэння цаны аднаго падзела планіметра ў абодвух гэтых выпадках.

Пры адным і тым-жа прэцызійным планіметры Карадзі, featured рознымі кантрольнымі лінеечкам (ад розных планіметраў) былі абведзены акружыны радыусам у 6 см для кожнай лінеечкі па чатыры разы. Сярэдні арытметычны з ліку падзелаў, якія атрымаўся пры 4-х кратным абводзе акружыны, і іх сярэднія квадратычныя памылкі для кожнай кантрольнай лінеечкі паказаны у табліцы № 1. Пры абводзе акружын рознымі кантрольнымі лінеечкамі былі прыняты ўсе захады, каб памылкі самога планіметра рабілі аднолькавы уплыў на рэзультаты абвода рознымі кантрольнымі лінеечкамі. Кантрольныя лінеечкі браліся толькі такія, якія не выклікалі ніякіх сумненняў у іх правільнасці.

Вялікая розніца паміж сярэднімі квадратычнымі памылкамі m і m′ аднэй з даследаваных кантрольных лінеечак (дзе m вылічана па сярэдніх квадратычных памылках рэзультатаў кожнай лінеечкі, а m′—па ухіленнях гэтых рэзультатаў ад сярэдняга арытметычнага з іх) указвае на неаднолькавасць даўжынь кантрольных лінеечак для аднэй і тэй-жа паметкі у 6 см.

[1]) Напрыклад: Бак-Извеков-Чеботарев. Курс Геодезии, ч. II, стар. 589.

ТАБЛІЦА І.

№№ кантрольных лінеечак	Лік падзелаў і іх сярэдн. кв. памылкі, атрыман. пры абводзе акружыны рознымі лінеечкамі	m^2	δ	δ^2
Кантрольныя лінеечкі ад планіметраў ф. „Геодезия"				
1	6682,2 ± 0,25	0,06	+6,9	47,6
2	6686,8 ± 0,48	0,23	+2,3	5,3
3	6685,0 ± 0,18	0,03	+4,1	16,8
4	6696,0 ± 0,00	0,00	−6,9	47,6
5	6695,5 ± 0,29	0,08	−6,4	41,6
	$k_1 = 6689{,}1$	0.40	−13,3 +13,3	158,9

$$m_1 = \sqrt{\frac{0{,}40}{5}} = \pm\, 0{,}28; \quad m_1' = \sqrt{\frac{158{,}9}{4}} = \pm\, 6{,}3$$

№№ кантрольных лінеечак	Лік падзелаў і іх сярэдн. кв. памылкі	m^2	δ	δ^2
Кантрольныя лінеечкі ад прэцыз. планіметраў Coradi Zürich				
1	6687,0 ± 0,00	0,00	+5,4	29,3
2	6697,0 ± 0,70	0,49	−4,6	21,2
3	6692,8 ± 0,48	0,23	−0,4	0,2
4	6693,8 ± 0,48	0,23	−1,4	2,0
5	6694,1 ± 0,62	0,38	−1,8	3,2
6	6689,8 ± 0,25	0,06	+2,6	6,8
	$k_2 = 6692{,}4$	1,39	+8,0 −8,2	62,7

$$m_2 = \sqrt{\frac{1{,}39}{6}} = \pm\, 0{,}49; \quad m_2' = \sqrt{\frac{62{,}7}{5}} = \pm\, 3{,}5$$

№№ кантрольных лінеечак	Лік падзелаў і іх сярэдн. кв. памылкі	m^2	δ	δ^2
Кантрольныя лінеечкі ад кампенсац. планіметраў Coradi Zürich				
1	7367,5 ± 0,65	0,42	− 2,1	4,4
2	7359,2 ± 0,75	0,56	+ 6,2	38,9
3	7366,7 ± 0,63	0,40	− 1,3	1,7
4	7365,7 ± 0,63	0,40	− 0.3	0,1
5	7364,0 ± 0,58	0,33	+ 1,4	2,0
6	7367,7 ± 0,25	0,06	− 2,3	5,3
7	7363,0 ± 0,58	0,33	+ 2,4	5,8
8	7369,0 ± 0,41	0,17	− 3,6	13,0
	$k_3 = 7365{,}4$	2,67	− 9,6 +10,0	71,2

$$m_3 = \sqrt{\frac{2{,}67}{8}} = \pm\, 0{,}58; \quad m_3' = \sqrt{\frac{71{,}2}{7}} = \pm\, 3{,}2$$

Адносныя памылкі E сярэдняй даўжыні аднэй з даследаваных кантрольных лінеечак па кожнай з 3-х груп табліцы 1 атрымаліся такія:

$$E_1 = \frac{m'_1}{k_1} = \frac{6{,}3}{6689{,}1} = 0{,}094\%$$

$$E_2 = \frac{m'_2}{k_2} = \frac{3{,}5}{6692{,}4} = 0{,}052\%$$

$$E_3 = \frac{m'_3}{k_3} = \frac{3{,}2}{7365{,}4} = 0{,}044\%$$

Такім чынам, сярэднюю памылку ў даўжыні кантрольнай лінеечкі можна лічыць каля 0,05%.

Бяручы поўны дыферэнцыял ад выразу:

$$\lg Q = \lg\pi + 2\lg r,$$

дзе Q — плошча круга, $\pi = 3{,}14159$, r — даўжыня кантрольнай лінеечкі, і пераходзячы ад дыферэнцыялаў да абсалютных памылак, атрымаем формулу адноснай памылкі у плошчы Q:

$$\frac{\Delta_Q}{Q} = \frac{\Delta\pi}{\pi} + 2\frac{\Delta r}{r} \quad . \; . \; . \; (1)$$

Відавочна, што адносная памылка у Q будзе залежаць толькі ад памылкі ў даўжыні кантрольнай лінеечкі, бо π можна ўзяць з усякім лікам знакаў. Улічваючы гэта і падстаўляючы ў формулу (1) замест адноснай памылкі у даўжыні кантрольнай лінеечкі 0,05%, будзем мець:

$$\frac{\Delta_Q}{Q} = 0{,}1\%$$

Значыцца, цана аднаго падзела планіметра, вылічаная з дапамогай кантрольнай лінеечкі, ужо ад таго, што памылкова Q будзе мець памылку у 0,1%, чаму плошча усякага размеру і формы вылічаная з дапамогаю такога планіметра, будзе мець памылку каля 0,1%, нават не ўлічваючы памылак: абвода, адлікаў, нанясення участка на паперу і дэфармацыі паперы.

Пры вызначэнні цаны аднаго падзела планіметра з дапамогаю плошчы фігуры, нанесенай на план, бяруць звычайна квадрат з бокам не больш 20 см. Абазначаючы плошчу квадрата праз P, бок яго праз a, напішам формулу адноснай памылкі плошчы гэтага квадрата:

$$\frac{\Delta_P}{P} = 2\frac{\Delta_a}{a} \quad . \; . \; . \; (2)$$

Пры Δ_a, роўным 0,1 мм, і a роўным 20 см, adносная памылка у P будзе роўна:

$$\frac{\Delta_P}{P} = \frac{1}{1000} = 0{,}1\%$$

Значыцца, і пры такім вызначэнні цаны аднаго падзела планіметра яна будзе памылкова не менш, як на 0,1%, бо плошчы квадрата, па якім вызначаецца цана аднаго падзела планіметра, бяруцца звычайна менш 400 кв. см, і таму, што тут намі не ўлічаны памылкі абвода і адлікаў па планіметры.

Абазначаючы праз P—плошчу некаторай фігуры праз c—цану аднаго падзела планіметра і n—лік дзяленняў лікавага калёсіка планіметра пры абводзе данай фігуры, напішам:

$$\lg p = \lg c + \lg n$$

Адкуль:

$$\frac{\Delta_p}{p} = \frac{\Delta_c}{c} + \frac{\Delta_n}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3),$$

дзе Δ з адпаведнымі значкамі ёсць абсалютныя памылкі велічынь p, c і n.

З формулы (3) відаць, што адносная памылка большых плошчаў менш, чым малых, і што памылка ў цане аднаго дзялення планіметра робіць аднолькавы уплыў як на малыя, так і на вялікія плошчы.

Пры $\frac{\Delta_c}{c} = 0{,}1\%$, $\Delta_n = 1$ дзял. і $n = 1000$ дзял. маем, што

$$\frac{\Delta_p}{p} = 0{,}2\%.$$

Такім чынам, дакладней, чым у 0,1%, з дапамогаю планіметра плошчы вылічаць нельга, ужо з тэй прычыны, што цана аднаго падзела планіметра вызначаецца з дакладнасцю не вышэй 0,1%. Улічваючы памылкі ў вызначэнні цаны аднаго падзела планіметра, памылку ў абводзе і адліках па планіметры і памылку нанясення данай фігуры на паперу, можна гаварыць, што дакладнасць вызначэння плошчаў планіметрам Карадзі не вышэй 0,2%.

З табліцы 1 відаць, што адносная памылка ў вызначэнні цаны аднаго падзела планіметра, ад няправільнасці даўжыні кантрольнай лінеечкі, можа дасягаць да 0,3%, чаму праверку планіметра патрэбна рабіць з дапамогай кантрольнай лінеечкі, а цану аднаго падзела вызначаць з дапамогаю сеткі квадрата на плане, бо апрача таго, што вызначаная такім чынам цана аднаго падзела планіметра часта будзе дакладней, тут мае значэнне і той факт, што будзе некаторым чынам улічвацца дэфармацыя паперы.

§ 2. Для графічнага вылічэння плошчаў, абмежаваных простымі лініямі, разбіваюць даны участак на трыкутнікі, простакутнікі і трапецыі і плошчу кожнай з гэтых геаметрычных фігур вылічаюць згодна правіл геаметрыі.

Беручы поўны дыферэнцыял ад выразаў:

$$\lg P = \lg\frac{1}{2} + \lg a + \lg h;$$

$$\lg P = \lg a + \lg h,$$

дзе P—плошча трыкутніка, простакутніка ці трапецыі, a—аснова трыкутніка ці простакутніка, ці сярэдняя лінія трапецыі, h—вышыня гэтых геаметрычных фігур, і пераходзячы ад дыферэнцыялаў да абсалютных памылак, атрымаем для вылічэння адноснай памылкі плошчы аднолькавую для ўсіх гэтых фігур формулу:

$$\frac{\Delta_p}{P} = \frac{\Delta_a}{a} + \frac{\Delta_h}{h} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Тут Δ_p—абсалютная памылка плошчы, Δ_a і Δ_h—абсалютныя памылкі a і h, атрыманыя пры вымярэнні з плана. З формулы (4) відаць, што адносная памылка залежыць ад размераў велічынь a і h і маштаба плана. Таму разбіўку участка на фігуры патрэбна рабіць такім чынам, каб a і h мажліва былі большыя і значна не адрозніваліся сваімі размерамі адна ад аднэй, бо пры вялікім значэнні аднэй з велічынь a ці h і пры малым другой, адносная памылка плошчы будзе прыблізна роўная адноснай памылцы малой велічыні.

Ніжэй будзе паказана, што найбольш распаўсюджаная лагарыфмічная лінейка, з модулем у 25 см, дае магчымасць рабіць множанне і дзяленне з дакладнасцю каля 0,1%, чаму з дапамогаю яе можна рабіць вылічэнне плошчаў па дадзеных, узятых з планаў, бо памылка ў плошчы згодна формулы (4), звычайна бывае больш, чым 0,1%.

Застановімся цяпер на пытанні аб дакладнасці вылічэння плошчаў аналітычным шляхам па дадзеных, вымераных у натуры.

§ 3. Аналітычным шляхам плошча вылічаецца альбо па формулах трыганаметрыі, альбо па каардынатах вяршынь палігона. Формулу адноснай памылкі плошчы трыкутніка, вылічанай па двух баках і куту паміж імі, можна напісаць так:

$$\frac{\Delta_P}{P} = \frac{\Delta_a}{a} + \frac{\Delta_b}{b} + \operatorname{ctg}\beta\Delta_\beta, \qquad (5)$$

дзе P—плошча трыкутніка, a і b—бакі яго, β—кут паміж данымі бакамі, a Δ—адпаведныя абсалютныя памылкі. З формулы (5) відаць, што пры малым куце β, г. зн. пры трыкутніку малой плошчы, адносная памылка плошчы трыкутніка можа быць значнай.

Пры вымярэнні ліній з дакладнасцю ў 0,05%, кута з дакладнасцю ў адну мінуту і прымаючы $\beta = 60^\circ$, будзем мець у плошчы трыкутніка адносную памылку:

$$\frac{\Delta_P}{P} = 0{,}12\%$$

Дзеля таго каб сказаць, якія сродкі, у сэнсе ступені дакладнасці, можна ўжываць пры вылічэнні плошчаў па каардынатах, знойдзем найменшую адносную памылку плошчы, вылічанай па каардынатах, у залежнасці ад памылак у лініях і кутах палігона.

Прымаючы першы пункт палігона за пачатак каардынат, напішам вядомую формулу плошчы па каардынатах у выгляд зе:

$$P = \frac{x_2(y_3 - y_1)}{2} + \frac{x_3(y_4 - y_2)}{2} + \ldots + \frac{x_n(y_{n+1} - y_{n-1})}{2} \qquad (6)$$

З прычыны, што адносная памылка сумы ляжыць у граніцах паміж найменшай і найбольшай адноснымі памылкамі складнікаў, то для знаходжання найменшай памылкі плошчы, у залежнасці ад памылак у лініях і кутах палігона, знойдзем найменшую адносную памылку некаторага складніка. Памылкі ў складніках, з якіх, як сума гэтых складнікаў, атрымліваецца плошча, залежаць ад памылак у каардынатах. Найменшая памылка, відавочна, павінна быць у першым складніку формулы (6).

Знойдзем памылку гэтага складніка. Напішам:

$$S = \frac{x_2(y_3 - y_1)}{2} \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Выражаючы каардынаты праз прырасты і памятаючы, што мы прынялі за пачатак каардынат першы пункт палігона, формулу (7) перапішам так:

$$S = \frac{\Delta x_1(\Delta y_1 + \Delta y_2)}{2}$$

Замяняючы ў гэтай формуле прырасты даўжынямі ліній і ўнутранымі кутамі і прымаючы азімут першай лініі беспамылковым і роўным нулю, напішам:

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\beta}{2} \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

дзе d_1 і d_2—даўжыні ліній палігона, а β—унутраны кут, пры чым d_1, d_2 і β—незалежныя зменныя.

Лагарыфмуючы формулу (8) і бяручы потым поўны дыферэнцыял, атрымаем:

$$\frac{\Delta_s}{S} = \frac{\Delta d_1}{d_1} + \frac{\Delta d_2}{d_2} + ctg\beta\Delta_\beta \quad . \ . \ . \ . \ (9)$$

Формула (9) падобна да формулы (5). Значыцца, пры вылічэнні плошчаў па каардынатах, можна лічыць, што адносная памылка ў плошчы, пры вымярэнні ліній з дакладнасцю у $\frac{1}{2000}$ а кутоў з дакладнасцю у адну мінуту, будзе парадка 0,1%. Гэта і зразумела, бо атрымаць рэзультат больш дакладны, чым выходныя даныя, наогул кажучы, немагчыма.

Такім чынам, плошча, вылічаная аналітычным шляхам, будзе мець памылку парадка 0,1%, такую дакладнасць можа забяспечыць добра пабудаваная лагарыфмічная лінейка з маштабам 250—500 мм.

Разбярэм цяпер пытанне аб ужыванні лагарыфмічнай лінейкі пры вылічэнні плошчаў крывалінейных фігур.

§ 4. Спачатку застановімся на пытанні дакладнасці лагарыфмічнай лінейкі.

Кожная шкала лагарыфмічнай лінейкі пабудавана згодна асобнага раўнання. Таму дакладнасць кожнай з шкал лагарыфмічнай лінейкі можна выявіць, аналізуючы раўнанне, згодна якога шкала пабудавана.

Напішам раўнанне шкалы аснаванняў:

$$y = m\lg x, \qquad (10)$$

дзе y—некаторы адрэзак на шкале, адпавядаючы ліку x, а m — маштаб шкалы.

Адносную памылку адліку па шкале аснаванняў лепш за усё знайсці шляхам дыферэнцыявання раўнання (10), папярэдне перайдзячы ад дзесятковых лагарыфмаў да натуральных.

Дыферэнцыруючы раўнанне (10) і пераходзячы ад дыферэнцыялаў да абсалютных памылак, напішам:

$$\Delta_y = 0{,}43\ m\,\frac{\Delta_x}{x}$$

Адкуль

$$\frac{\Delta_x}{x} = \frac{\Delta_y}{0{,}43\ .\ m}$$

Неузброеным вокам можна разглядзець адрэзак у 0,1 mm, прымаючы таму $\Delta_y = 0{,}1$ мм, напішам:

$$\frac{\Delta_x}{x} = \frac{0{,}1}{0{,}43\ .\ m} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (11)$$

З формулы (11) відаць, што дакладнасць лагарыфмічнай лінейкі залежыць ад яе маштаба.

Пры $m = 250$ мм маем:

$$\frac{\Delta_x}{x} = 0{,}1\%$$

Для мэт выяўлення сапраўднай дакладнасці лагарыфмічнай лінейкі перамножана было рад розных лікаў на лагарыфмічнай лінейцы з маштабам у 250 мм, гэтыя-ж лікі былі перамножаны на арыфмометры. Адносныя памылкі здабыткаў не выходзілі за межы 0,1%, а адносныя памылкі сумы некалькіх здабыткаў не выходзілі за межы 0,05%.

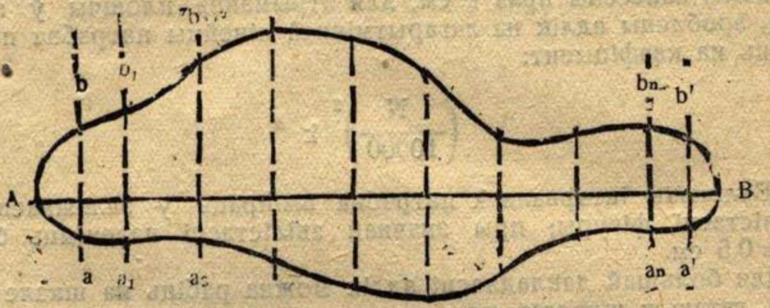
Значыцца, лагарыфмічную лінейку можна ўжываць пры вылічэнні плошчаў як па даных, узятых з плана, так і па даных, вымераных у натуры, бо рэзультаты вылічэнняў з прычыны недакладнасці выходных дадзеных, будуць мець, звычайна, памылкі большыя, чым дакладнасць лінейкі з маштабам у 25 см, не кажучы ўжо аб лінейках большых размераў і прэцызійных лінейках.

У матэматычнай і геадэзічнай літаратуры ёсць указанні аб вылічэнні плошчаў з дапамогаю роўнамернай шкалы. Зробленыя намі даследванні па вылічэнні плошчаў гэтым метадам паказваюць, што ў некаторых выпадках, з дапамогаю роўнамернай маштабнай шкалы лагарытмічнай лінейкі ці шкалы мантыс можна вылічаць плошчы больш дакладна, чым звычайным планіметрам.

Для вылічэння плошчаў з дапамогаю лагарытмічнай лінейкі да яе бягунку быў прымацован індэкс, востры канец якога знаходзіўся каля краёў падзелаў роўнамернай маштабнай шкалы лагарытмічнай лінейкі. Вылічэнне плошчаў, агранічаных крывымі лініямі, такой лагарытмічнай лінейкай рабілася такім чынам. Прыблізна на сярэдзіне данай фігуры, па найбольшым яе працяжэнні, праводзілася (простым алоўкам) лінія АБ, удоўж якой з дапамогаю маштабнай лінейкі рабіліся паметкі праз некаторыя роўныя адлегласці, напрыклад, праз адзін см, пры чым крайнія адзнакі павінны адстаяць ад ліній ab і $a'b'$ на палову прынятай адлегласці паміж паметкамі, у нашым выпадку на 0,5 см. (Рыс. 1). Далей, з дапамогаю лагарытмічнай лінейкі вымяраліся лініі:

$$a_1b_1,\ a_2b_2,\ a_3b_3\ .\ .\ .\ .\ \text{і г. д.}$$

Само вымярэнне рабілася такім чынам. Маштабная міліметравая шкала нулём прыкладалася да пункта a_1 крывой, а індэкс перасоўваўся ў пункт b_1, пасля чаго індэкс злучаўся з пунктам a_2 і потым перасоўваўся ў пункт b_2 і г. д., адлікі пры гэтым не рабіліся. Не цяжка бачыць, што ў маштабе 1 : 10000, пры адлегласці паміж адзнакамі у 1 см, адлік у сантыметрах на міліметравай шкале ў пункце b_n дасць плошчу ў гектарах фігуры, якая агранічана крывой і паралельнымі лініямі ab і $a'b'$. Калі маштабнай шкалы не хопіць, каб вымерыць суму адрэзкаў a_1b_1, a_2b_2 і г. д., дык на данай фігуры адзначаецца кропкай канец шкалы і далейшае вымярэнне пачынаюць ад гэтай кропкі, як і раней, пры гэтым толькі замячаюць, колькі разоў паўтарыцца ўся шкала лінейкі. Для атрымання ўсяе плошчы данай фігуры да зробленага адліка патрэбна дадаць плошчу сегментаў aAb і $a'Bb'$. Плошчы гэтых сегментаў, калі крывыя, якія агранічваюць іх, можна лічыць за частку акружыны ці парабалы, вылічаюцца па лагарытмічнай лінейцы, як здабытак даўжыні ab ці $a'b'$ на вышыню h і на каэфіцыент 0,7.



Калі гэтыя крывыя за парабалы лічыць нельга, дык плошчы, якія агранічваюцца імі, патрэбна прыраўняць да якіх-небудзь іншых геаметрычных фігур. Часта з'яўляецца магчымым адзнакі на лініі AB размясціць такім чынам, што можна ўнікнуць вылічэння плошчаў фігур aAb і $a'Bb'$, прынамсі, аднэй з гэтых фігур. Апрача лініі AB і на ёй адзнак данай фігуры, ніякіх ліній праводзіць не патрэбна. Адрэзкі a_1b_1, a_2b_2 і г. д. вымяраюцца лінейкай супроць зробленых адзнак лініі AB. Лінейка кожны раз размяшчаецца на вока перпендыкулярна лініі AB. Памылку ў плошчы з тэй прычыны, што лінейка будзе ўкладвацца не перпендыкулярна лініі AB, можна выразіць формулай:

$$m_l = 12 \cdot Sn^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{n}\,, \quad . \; . \; . \; (12)$$

дзе l—сярэдняя шырыня фігуры, α—кут ухілення лінейкі ад 90°, n—лік адкладанняў, альбо, усё роўна, лік адзнак. Гэтуюа памылку можна лічыць прапарцыянальнай кораню квадратоваму з ліку адзнак, таму што плошча вылічаемай фігуры агранічана крывымі лініямі, чаму адрэзкі l дзеля таго, што лінейка будзе не перпендыкулярна размяшчацца лініі AB, могуць як памяншацца, так і павялічвацца. Практыка паказвае, што на вока можна пабудаваць перпендыкуляр з дакладнасцю каля 40′. Бяручы α роўным 2°, l—10 см, n—100, атрымаем m_l роўным 0,06 см², што ў плошчы такіх размераў, пры ўмове, што адзнакі будуць зроблены праз 0,5 см; дасць памылку толькі каля 0,01%, якая на дакладнасць вылічэння плошчаў рабіць уплыву не будзе. З плошчаў фігур, якія шырэй 6—10 см, патрэбна выдзяляць правільную геаметрычную фігуру, плошчу якой вылічаць звычайным шляхам па лагарытмічнай лінейцы, а плошчы частак фігур, якія будуць анаходзіцца паміж простымі і крывымі, патрэбна вылічаць выкладзеным вышэй метадам.

У тых выпадках, калі план, плошчы фігур якога вылічаюцца, складзены ў маштабе 1 : N, а інтэрвалы (адлегласці паміж адзнакамі) нанесены праз k см, для атрымання плошчы ў гектарах, зроблены адлік на лагарытмічнай лінейцы патрэбна памножыць на каэфіцыент:

$$\left(\frac{N}{10000}\right)^2 k$$

Велічыню інтэрвала k патрэбна выбіраць у залежнасці ад звілістасці фігуры; пры значнай звілістасці належыць браць k = 0,5 см.

Для большай дакладнасці адлік можна рабіць на шкале мантыс, гэтаю-ж шкалою, пры вымярэнні плошчаў правільных геаметрычных фігур, лепей, чым цыркулем, вымяраць лініі, большыя 10 см.

Урэшце падаем табліцу 2, у якой паказаны рэзультаты вылічэння плошчаў у маштабе 1 : 10000 адных і тых-ж крывалінейных фігур рознай звілістасці кампенсацыйным планіметрам Карадзі, прэцызійным вісячым планіметрам Карадзі і лагарытмічнаю лінейкаю.

Табліца 2.

№№ плошчаў	Кампенсацыйны планніметр Карадзі № 8159		Прэцызійны планіметр Карадзі № 4626		Лагарытмічная лінейка		Памылка у плошчы, вылічанай:	
	Плошча у га	Час у мінут	Плошча у га	Час у мінут	Плошча у га	Час у мінут	лагарыт. лінейкай	планімет. № 8159
1	3,14	3,5	3,24	4,0	3,26	4,5	0,62%	3,1 %
2	3,96	3,0	3,92	4,0	3,94	4,0	0,51	1,0
3	7,27	3,5	7,37	7,0	7,37	8,5	0,0	1,4
4	4,01	3,2	4,02	8,0	4,0	5,0	0,50	0,25
5	77,80	8,5	77,77	9,0	77,66	11,5	0,14	0,04
6	78,00	6,0	78,16	10,5	77,85	13,0	0,40	0,21
7	50,20	6,2	50,25	9,0	50,24	11,0	0,02	0,10
8	45,00	5,5	45,20	7,5	45,12	6,6	0,18	0,44

З табліцы № 2 відаць, што дакладнасць вылічэння плошчаў крывалінейных фігур лагарытмічнай лінейкай не ніжэй дакладнасці, якую дае кампенсацыйны планіметр Карадзі; для малых плошчаў гэтая дакладнасць вышэй. Час, патрэбны на вылічэнне плошчаў лагарытмічнай лінейкай, у паўтара разы прыблізна большы, чым гэта патрэбна на вылічэнне гэтых плошчаў планіметрам, калі не ўлічваць часу, які патрэбны на ўстаноўку і паверку планіметра, які (час) можа даходзіць да 1 гадзіны.

Такім чынам, на лагарытмічнай лінейцы зусім з дастатковай дакладнасцю можна вылічаць плошчы фігур, якія агранічаны, як простымі, так і крывымі лініямі. Час, патрэбны на гэтыя вылічэнні, у шэрагу выпадкаў не большы, чым гэта патрэбна для вылічэння плошчаў планіметрам, калі ўлічваць яго ўстаноўку паверку.

РЕЗЮМЕ

О ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ И ПРИМЕНЕНИИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙКИ ПРИ ИХ ВЫЧИСЛЕНИИ.

Исследование, поставленное нами, дает основания утверждать, что длины контрольных линеечек, между пометками и иглой, отличаются от показанных длин на линеечке в среднем около 0,05%, что при определении цены одного деления планиметра с помощью такой линеечки дает ошибку около 0,1%, если даже не учитывать ошибок, вызываемых другими источниками. Площадь любого размера и формы, вычисленная планиметром, цена которого определена с точностью в 0,1%, будет иметь ошибку не менее, чем 0,1%, даже если не учитывать ошибок: обвода, отсчетов, нанесения участка на бумагу, деформации бумаги и инструментальных ошибок самого планиметра.

При определении цены одного деления планиметра с помощью километровой сетки берут обычно квадрат площадью в 400 кв. см. Беря абсолютную ошибку нанесения стороны такого квадрата, равную 0,1 мм., нетрудно видеть, что ошибка в определении цены одного деления планиметра с помощью такога квадрата будет около 0,1%.

Таким образом точнее, чем 0,1%, с помощью планиметра площади вычислять нельзя, уже оттого, что цена одного деления планиметра, определяется с точностью не выше 0,1%.

Учитывая все ошибки, вызываемые разными источниками, можно говорить, что точность определения больших площадей планиметром Коради около 0,2%.

Из таблицы первой видно, что относительная ошибка в определении цены одного деления планиметра, от неверной длины контрольной линеечки, может достигнуть до 0,3%; поэтому проверку планиметра надлежит производить с помощью контрольной линеечки, а цену одного деления планиметра определять с помощью километровой сетки плана, ибо здесь имеет значение и тот факт, что будет учитываться деформация бумаги

Приведенные нами соображения (фор. 5 и 9) показвают, что при измерении линий полигона с точностью в 1 : 2000 и углов с точностью в одну минуту, ошибки при вычислении площадей, по формулам тригонометрии и по координатам, по данным, измеренным в натуре, будут около 0,1%, а в ряде случаев и более.

Хорошо изготовленная логарифмическая линейка с модулем в 250 мм дает возможность производить вычисления на шкале оснований с точностью не ниже 0,1%. Относительная же ошибка суммы нескольких результатов не выходит, обычно, за пределы 0,05%.

Таким образом, логарифмическую линейку можно применять при вычислении площадей как по данным, взятым с плана, так и по данным, измеренным в натуре, ибо результаты вычислений, по причине неточности исходных данных, будут иметь, обычно, ошибки большие, чем точность линейки с модулем в 250 мм, не говоря уже о линейках больших размеров и прецизионных.

Исследования показывают, что в ряде случаев с помощью равномерной шкалы, например, логарифмической линейки, можно вычислять площадь точнее, чем обычным планиметром Коради, особенно для площадей вытянутых фигур.

Для вычисления площадей с помощью логарифмической линейки к ее бегунку надлежит укрепить индекс, острый конец которого должен находиться около краев делений равномерной масштабной шкалы логарифмической линейки. Вычисление площади такой логарифмическй линейкой можно производить так.

Приблизительно на средине данной фигуры, по наибольшему ее протяжению, проводится (простым карандашом) линия AB, вдоль которой с помощью масштабной линейки наносятся пометки через некоторое равное расстояние, например, через один см, при чем крайние пометки должны отстоять от линий ab и a'b' на половину принятого расстояния между пометками, в нашем случае на 0,5 см (Чертеж 1). Дальше, с помощью логарифмической линейки измеряются линии: a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 и т. д. Само измерение производится таким образом. Масштабная миллиметровая шкала нулем прикладывается к точке a_1 кривой, а индекс передвигается в точку b_1, после чего индекс совмещается с точкой a_2 и затем передвигается в точку b_2 и т. д., отсчеты при этом не делаются. Нетрудно видеть, что в масштабе 1 : 10000, при расстоянии между пометками в 1 см, отсчет в сантиметрах на миллиметровой шкале в точке b_n даст площадь в гектарах фигуры, которая ограничена кривой и параллельными линиями. Если масштабной шкалы нехватит, чтобы измерить сумму отрезков a_1b_1, a_2b_2 и т. д., то на данной фигуре отмечается точкой конец шкалы, и дальнейшее измерение начинается от этой точки, как и раньше, при этом только замечают, сколько раз повторится вся шкала линейки. Для получений всей площади данной фигуры к полученному отсчету нужно прибавить площадь сегментов aAB и a'Bb'

Площади сегментов, когда кривые, ограничивающие их, можно считать за часть окружности или параболы, вычисляются на логарифмической линейке, как произведение длины ab или a'b' на высоту h и на коэффициент 0,7. Линейка каждый раз располагается на глаз перпендикулярное линии AB. Ошибка в площади оттого, что линейка будет укладываться не перпендикулярно к линии AB, выражается формулой (12) и будет не больше нескольких сотых процента.

В тех случаях, когда план, площади фигур которого вычисляются, составлен в масштабе 1 : N, а интервалы (расстояние между пометками) нанесены через k см, для получения площади в гектарах, сделанный отсчет на логарифмической линейке надо умножить на коэффициент.

$$\left(\frac{N}{10000}\right)^2 k$$

Индекс, укрепленный к бегунку логарифмической линейки, будет полезен не только при вычислении площадей, а и при графическом решении различных задач (например, при нанесении пикетных и реечных точек при тахеометрической с'емке) при этом для повышения точности можно пользоваться шкалою мантисс логарифмической линейки.

М. БЯЗВЕРХІ.

ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНАЕ РАЎНАННЕ ГЕАДЭЗІЧНАЙ ЛІНІІ НА ПАВЕРХНІ ВЯРЧЭННЯ

I.

У свой час матэматык Клеро (1713—1765 г.), вывучаючы траэкторыю пункта, які рухаецца па паверхні вярчэння пры адсутнасці дзеяння на яго непасрэдна прыкладзеных сіл, прышоў да вывада, што траэкторыяй павінна з'явіцца такая крывая лінія, сутычная роўніца якой супадае з нармаллю да паверхні ў кожным пункце гэтай лініі. Пры такіх умовах руху будзе існаваць, як вядома, толькі адна сіла—нармальная рэакцыя—якую павінна заключаць у сабе сутычная роўніца ва усіх пунктах траэкторыі і рухомы пункт будзе апісваць некаторую асобую лінію, якая называецца геадэзічнай лініяй.

Клеро, расклаўшы хуткасць на два вектары: $v . \sin\alpha$, $v . \cos\alpha$ і накіраваўшы першы па датычнай да паралельнага круга, а другі—па датычнай да мерыдыяна (α—кут геадэзічнай лініі з мерыдыянам), устанавіў наступную геаметрычную залежнасць:

$$R . \sin\alpha_0 = \text{Const.} = C \tag{1}$$

Гэта залежнасць паказвае, што здабытак радыуса паралелі на сінус азімута ёсць велічыня сталая ў кожным пункце і адначасова характарызуе геадэзічныя лініі на паверхні вярчэння.

У вышэйшай геадэзіі, геадэзічныя лініі маюць вельмі вялікае як тэарэтычнае, так і практычнае значэнне, таму мэтай нашага артыкула з'яўляецца спроба даць довад дыферэнцыянальнага раўнання геадэзічнай лініі на паверхні вярчэння, выходзячы непасрэдна з уласцівасці, дадзенай Клеро.

З аналітычнай геаметрыі вядома, што кут паміж двума дадзенымі кірункамі вызначаецца формулай:

$$\cos\psi = \cos\alpha . \cos\alpha_1 + \cos\beta . \cos\beta_1 + \cos\gamma . \cos\gamma_1 \tag{2}$$

Калі ў нашым выпадку

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \text{ і } \frac{dz}{ds}$$

прыняць за накіравальныя косінусы датычнай да геадэзічнай лініі, а

$$\cos\alpha,\ \cos\beta\ \text{і}\ \cos\gamma$$

лічыць за накіравальныя косінусы датычнай лініі, праведзенай да паралелі ў некаторым дадзеным пункце паверхні, то гэты кут ψ можна запісаць наступным чынам:

$$\psi=\frac{\pi}{2}-\alpha_0$$

або, згодна выраза (2), атрымаем;

$$\operatorname{Sin}\alpha_0=\frac{dx}{ds}\operatorname{coc}\alpha+\frac{dy}{ds}\cos\beta+\frac{dz}{ds}\cos\gamma \qquad (3)$$

Для спрашчэння выкладак, вызначым у дыферэнцыяльнай форме патрэбныя нам $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Будзем лічыць, што паверхня вярчэння дадзена раўнаннем:

$$\varphi(x,\ y,\ z)=x^2+y^2-f(z)=0 \qquad (4)$$

а адвольная паралель дадзена сістэмай:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-f(z)=0 \\ z-h=0 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

тады раўнанне датычнай лініі да паралелі ў агульнай форме можа быць напісана наступным чынам:

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{Y-x}{\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial y}\end{vmatrix}}$$

У нашым выпадку:

$$\frac{\partial F}{\partial z}=1,\frac{\partial F}{\partial y}=0\ \text{і}\ \frac{\partial F}{\partial x}=0$$

і значыцца, раўнанне датычнай лініі да паралелі канчаткова напішацца:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}=\frac{Y-y}{-\frac{\partial\varphi}{\partial x}}=\frac{Z-z}{0}$$

Адкуль накіравальныя косінусы будуць:

$$\text{Cos}\alpha=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}},\ \text{Cos}\beta=\frac{-\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}}$$

$$\text{і}\ \cos\gamma=0$$

Атрыманыя выражэнні для косінусаў падставім у формулу (3), атрымаем:

$$\text{Sin}\alpha_0=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}}-\frac{dy}{ds}\cdot\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}}$$

Гэта дыферэнцыяльнае выражэнне для $\sin\alpha_0$ дае нам мажлівасць напісаць і дыферэнцыяльнае раўнанне геадэзічнай лініі на паверхні вярчэння, выходзячы з геаметрычнага азначэння, якое дадзена Клеро.

Падставім для гэтага выражэнне $\sin\alpha_0$ у раўнанне (1), тады будзем мець:

$$R\cdot\frac{dx}{ds}\cdot\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}}-R\frac{dy}{ds}\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}}=C$$

З раўнання паверхні відаць, што:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}=2R$$

Такім чынам папярэдняе дыферэнцыяльнае раўнанне перапішацца:

$$\frac{dx}{ds}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{dy}{ds}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=2C$$

Выключым далей сталае „С“ пры дапамозе дыферэнцыявання апошняга выраза, атрымаем:

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{ds}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{d^2y}{ds^2}=0$$

Але характар раўнання паверхні такі, што выразы

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{ds}\text{ і }\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{ds}$$

ёсць роўныя паміж сабой. Улічваючы гэта, канчаткова можна напісаць, што для геадэзічнай лініі павінна быць:

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{d^2x}{ds^2}}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\frac{d^2y}{ds^2}}\tag{7}$$

Давядзём далей, што пры існаванні ўмовы (7) будзе здавальняцца таксама і раўнанне:

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{d^2x}{ds^2}}=\frac{\frac{\partial\varphi}{dz}}{\frac{d^2z}{\partial s^2}}$$

Для гэтага напішам ідавочныя раўнанні:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{dz}{ds}=0$$

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2}=0\tag{8}$$

Вызначым з (7) $\frac{d^2x}{ds^2}$ і $\frac{d^2y}{ds^2}$ і падставім іх у апошняе раўнанне сістэмы (8), атрымаем:

$$\frac{dx}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$$

Пасля некаторыхператварэнняў, гэта выражэнне можна прадставіць у выглядзе:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{dx}{ds}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{dy}{ds}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$$

Але прымаючы пад увагу першае раўнанне сістэмы (8), будзем мець:

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$$

або

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{d^2x}{ds^2}}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{\frac{d^2z}{ds^2}}$$

Такім чынам, раўнанне (7) перапішацца:

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{X''_s}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{Y''_s}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{Z''_s} \qquad (9)$$

Гэта сістэма разам з раўнаннем паверхні і будзе вызначаць сабою некаторую геадэзічную лінію.

Трэба заўважыць, што ўсе ператварэнні зразумела рабіліся так, каб канчатковае раўнанне атрымала агульную форму дыфэрэнцыяльнага раўнання геадэзічнай лініі на адвольнай паверхні, не гледзячы на тое, што вывучаемая паверхня есць па сутнасці паверхня вярчэння. Акрамя таго, ніжэй мы пабачым, што для довади ўласцівасці Клеро дастаткова абмежавацца толькі першай часткай сістэмы (9).

II.

Клеро, як мы ведаем, сваю тэарэму атрымаў, выхвдзячы з вельмі складаных меркаванняў, пабудаваных на прынцыпах аналітычнай механікі і таму ў вышэйшай геадэзіі яна звычайна даводзіцца чыста геаметрычным шляхам. Ніжэй мы даём аналітычны спосаб довади гэтай тэарэмы.

Будзем лічыць, што паверхня вярчэння дадзенага раўнаннем:

$$\varphi(x, y, z)=x^2+y^2-f(z)=0$$

Раўнанне геадэзічнай лініі возьмем у выглядзе:

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{d^2x}{ds^2}}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\frac{d^2y}{ds^2}} \qquad (2)$$

Тут, адносна поўнага раўнання геадэзічнай лініі, трэці стасу-
нак адкінуты таму, што другая прапорцыя з'яўляецца вынікам
першай. Апошняе раўнанне перапішам наступным чынам:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} = 0$$

У нашым паасобным выпадку яно будзе:

$$y\frac{d^2x}{ds^2} - x\frac{d^2y}{ds^2} = 0 \qquad (3)$$

Інтэгруя раўнанне (3), атрымаем

$$y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds} = C \qquad (4)$$

Напішам выражэнне кута паміж геадэзічнай лініяй і мерыды-
янам, яно будзе:

$$\operatorname{Sin}\alpha_0 = \frac{dx}{ds}\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}} - \frac{dy}{ds}\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}}$$

або

$$\operatorname{Sin}\alpha_0 = \frac{dx}{ds}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{dy}{ds}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Апошняе раўнанне можна ператварыць у наступнае:

$$\operatorname{Sin}\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds}\right)$$

Але для дадзенай паверхні

$$\sqrt{x^2+y^2} = R$$

і

$$y\frac{dx}{ds} - x\frac{dy}{ds} = C,$$

так што

$$\operatorname{Sin}\alpha_0 = \frac{1}{R} \cdot C$$

Адкуль і атрымліваецца:

$$R \cdot \operatorname{Sin}\alpha_0 = C$$

вядомая тэарэма Клеро.

М. БЯЗВЕРХІ.

ГЕАМЕТРЫЧНЫЯ ВЫЛІЧЭННІ ПРЫ ДАПАМОЗЕ $\lim \left|\frac{\text{Sinx}}{x}\right|_{x \to 0} = 1$

У курсах вышэйшай матэматыкі тэорыя граніц часта завяршаецца довадам двух наступных палажэнняў:

$$\lim \left|\frac{\text{Sinx}}{x}\right|_{x\to 0} = 1 \quad \text{i} \quad \lim \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right|_{n\to\infty} = e$$

Адносна гэтых граніц звычайна указваецца, што яны вельмі каштоўныя, і што ў далейшым для дыферэнцыяльнага лічэння яны будуць мець вялікае значэнне. Пры такім падыходзе да справы зусім застаецца незразумелым для студэнта сэнс гэтых граніц, іх назначэнне і прыстасаванні.

Паміж іншым ёсць шмат мажлівасцяй для канкрэтызацыі граніцы $\lim \left|\frac{\text{Sinx}}{x}\right|_{x\to 0}$ і яе прыстасавання.

Мі ніжэй пакажам скрыстанне гэтай граніцы для розных геометрычных вылічэнняў.

1. ВЫЛІЧЭННЕ ПЛОШЧЫ АКРУЖЫНЫ.

Возьмем акружыну з радыусам R і ўпішам у яе правільны многакутнік. Бок многакутніка абазначым праз a_n, а плошчу праз S_n. Тады плошча ўпісанага многакутніка выразіцца формулай

$$S_n = \sum \frac{R^2 \,.\, \text{Sin}\frac{2\pi}{n}}{2}$$

або

$$S_n = \frac{R^2}{2} \,.\, n \,.\, \sin\frac{2\pi}{n} \tag{1}$$

Відавочна, што плошчу акружыні можна разглядаць, як граніцу плошчы правільнага ўпісанага многакутніка [1]), пры умове, што „n“—лік яго бакоў—імкнецца да бязмежнасці, або

[1]) У агульным выпадку трэба спачатку давесці, што граніцы, да якіх імкнуцца плошча і пэрыметр упісаных многакутніках, не залежаць ад выгляда многакутнікаў і іх ўласцівасцей, але на гэтым мы не спыняемся,

$$S = \lim \left| S_n \right|_{n \to \infty}.$$

Падстаўляючы ў апошнюю формулу выражэнне для S_n, атрымаем:

$$S = \lim \left| \frac{R^2}{2} . n . \sin \frac{2\pi}{n} \right|_{n \longrightarrow \infty}$$

Далей робім наступныя ператварэнні:

$$S = \frac{R^2}{2} \lim \left| n . \sin \frac{2\pi}{n} \right|_{n \longrightarrow \infty} =$$

$$= \frac{R^2}{2} \lim \left| \frac{\operatorname{Sin} \frac{2\pi}{n}}{\frac{1}{n}} \right|_{n \longrightarrow \infty} =$$

$$= \frac{2\pi R^2}{2} \lim \left| \frac{\operatorname{Sin} \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \right|_{n \longrightarrow \infty}$$

Зрабіўшы замену

$$\left. \frac{2\pi}{n} \right|_{n \longrightarrow \infty} = X \Bigg|_{x \longrightarrow 0},$$

выражэнне для плошчы можна напісаць у наступным выглядзе

$$S = \pi R^2 \lim \left| \frac{\operatorname{Sin} x}{x} \right|_{x \longrightarrow 0},$$

або, канчаткова:

$$S = \pi R^2,$$

што і трэба давесці.

2. ВЫЛІЧЭННЕ ДАЎЖЫНІ ДУГІ АКРУЖЫНЫ.

Даўжыню дугі акружыны будзем разглядаць, як граніцу периметра правільнага многакутніка, упісанага ў гэту акружыну.

Периметр многакутніка абазначым праз P_n, тады „С"—даўжыня акружыны выразіцца формулай:

$$C = \lim \left| P_n \right|_{n \to \infty}$$

Периметр P_n можна прадставіць раўнаннем:

$$P_n = \Sigma a_n,$$

або

$$P_n = n \,.\, 2R \,.\, \mathrm{Sin} \frac{\pi}{n}$$

пасля гэтага даўжыня дугі акружыны будзе:

$$C = \lim \left| 2R \,.\, n \,.\, \sin \frac{\pi}{n} \right|_{n \to \infty}$$

пасля некаторых ператварэнняў атрымаем:

$$C = 2\pi R \lim \left| \frac{\mathrm{Sin} \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \right|_{n \to \infty}$$

На падставе формулы

$$\lim \left| \frac{\mathrm{Sin} x}{x} \right|_{x \to 0} = 1$$

даўжыня дугі акружыны напішацца формулай:

$$C = 2\pi R$$

3. АБ'ЁМ КОНУСА

Аб'ём конуса атрымаем, як граніцу аб'ёма правільнай многакутнай піраміды, упісанай у дадзены конус. Вышыню конуса абазначым праз H, тады

$$V = \lim \left| V_n \right|_{n \to \infty}$$

Элементарны аб'ём, або аб'ём $\frac{1}{n}$ часткі аб'ёма правільнай піраміды, як лёгка бачыць, будзе наступны:

$$\frac{R^2}{2} \cdot \operatorname{Sin}\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{H}{3}$$

Значыцца, V_n можна выразіць формулай:

$$V_n = \frac{H}{3} \cdot \frac{R^2}{2} \cdot n \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$$

так што аб'ём конуса атрымаецца як граніца:

$$V = \lim \left| \frac{H}{3} \cdot \frac{R^2}{2} \cdot n \sin\frac{2\pi}{n} \right|_{n \to \infty},$$

або

$$V = 2\pi \cdot \frac{H}{3} \cdot \frac{R^2}{2} \lim \left| \frac{\operatorname{Sin}\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \right|_{n \to \infty}$$

Адкуль формула для аб'ёма конуса будзе наступная:

$$V = \pi R^2 \cdot \frac{H}{3}$$

4. ВЫЛІЧЭННЕ БОЧНАЙ ПАВЕРХНІ КОНУСА.

Паверхню конуса будзем разглядаць, як граніцу паверхні правільнай многакутнай пірамiды, якая ўпісана ў гэты конус. Фармуючую конуса абазначым праз е, а зменную апафему элементарнай пірамiды праз Y. Выходзячы з нашага азначэння, можам напісаць:

$$S = \lim \left| S_n \right|_{n \to \infty},$$

або

$$S_n = \sum \frac{a_n Y}{2}$$

тут a_n будзе:

$$a_n = 2R \cdot \sin\frac{\pi}{n}$$

значыцца:

$$S = \lim \left| R \cdot n \cdot y \cdot \sin\frac{\pi}{n} \right|_{\substack{n \to \infty \\ y \to e}}$$

робім наступныя ператварэнні:

$$S = R\left|y \cdot \pi \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right|_{\substack{n \to \infty \\ y \to e}} = \pi R \cdot e \cdot \lim\left|\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right|_{n \to \infty}$$

Адсюль лёгка атрымліваем формулу для бачнай паверхні онуса:

$$S = \pi Rl.$$

Нарэшце заўважым, што паказаным спосабам можна рабіць шмат іншых аналягічных задач, але пакуль застановімся на этым і выкажам думку, што пры умелым скарыстанні розных матэматычных палажэнняў можна атрымаць цэлы рад цікавых рыстасаванняў.

Б. ЛЕБЕДЕВ.

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ arctg x В СТЕПЕННОЙ РЯД

Среди множества функций, могущих быть разложенными в бесконечные ряды, особенного внимания заслуживают те функции, при помощи которых можно находить значение величин, имеющих чрезвычайно широкое применение в науке и технике. К числу таких величин следует отнести, прежде всего, $\sin x$, $\cos x$, $\lg x$, e^x и π.

Если первые четыре функции очень легко разлагаются в ряды и, следовательно, легко могут быть вычислены, то этого нельзя сказать про вычисление π.

Как известно, π вычисляется, обыкновенно, при помощи разложения в бесконечный ряд функции $\operatorname{arctg} x$.

Главная трудность, с которой приходится иметь дело при этом разложении, заключается в нахождении производной n-го порядка функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Поступить при отыскании этой производной так, как это делается с многими другими, более простыми функциями, т. е. найти последовательно несколько первых производных и затем, уловив общий закон составления этих производных, по аналогии написать производную n-го порядка, в данном случае не представляется возможным.

Если мы все же пожелаем осуществить разложение, то для отыскания $y^{(n)}$ нам придется прибегнуть к помощи различных искусственных приемов.

Большинство этих приемов довольно сложны и представляют вследствие этого некоторую трудность, особенно при первоначальном знакомстве с ними.

Ниже приводится весьма простой способ нахождения производной n-го порядка функции $y = \operatorname{arctg} x$, позволяющий без особых затруднений произвести разложение ее в степенной ряд.

Имеем

$$y = \operatorname{arctg} x.$$

Находим первую производную этой функции

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

Придаем y′ следующий вид:

$$\text{(I)} \qquad y' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+ix} + \frac{1}{1-ix}\right], \quad \text{где } i = \sqrt{-1}$$

Находим вторую, третью и т. д. производные.

Произведя сокращение и вынесение за скобку, получим:

$$y^{II} = \frac{i}{2}\left[\frac{-1}{(1+ix)^2} + \frac{1}{(1-ix)^2}\right], \quad y^{III} = \frac{2 . i^2}{2}\left[\frac{1}{(1+ix)^3} + \frac{1}{(1-ix)^3}\right]$$

$$y^{IV} = \frac{1 . 2 . 3 i^3}{2}\left[\frac{-1}{(1+ix)^4} + \frac{1}{(1-ix)^4}\right] \text{ и т. д.}$$

Общий закон составления производных становится вполне ясным. По аналогии пишем производную n го порядка. Она будет иметь следующий вид:

$$y^{(n)} = \frac{(n-1)!\, i^{n-1}}{2}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{(1+ix)^n} + \frac{1}{(1-ix)^n}\right] \qquad \text{(II)}$$

Несмотря на присутствие мнимой величины i эта производная оказывается действительной при всех вещественных значениях x и n, в чем нетрудно убедиться, исследовав более детально функцию $y^{(n)}$.

Путем приведения правой части формулы (II) к общему знаменателю ей можно придать несколько более простой вид (величина i останется только в числителе):

$$y^{(n)} = \frac{(n-1)!\, i^{n-1}}{2(1+x^2)^n}\left[(-1)^{n-1}(1-ix)^n + (1+ix)^n\right] \qquad \text{(III)}$$

Для разложения arctgx в ряд Maclaurin'a находим значения функции и ее производных при $x = 0$,

$f(0) = \text{arctg}\, 0 = 0$

$f^{I}(0) = 1$

$f^{II}(0) = 0$

$f^{III}(0) = -2!$

$f^{IV}(0) = 0$

$f^{V}(0) = 4!$

$f^{VI}(0) = 0$

$f^{VII}(0) - 6!$

Все четные производные, как нетрудно заметить, равны нулю

. . . .

. . . .

$$f^{n)}(0) = \frac{(n-1)!\, i^{n-1}}{2}\left[(-1)^{n-1} + 1\right]$$

Пишем ряд Maclaurin'а

$$f(x) = f(0) + x\, f^{I}(0) + \frac{x^2}{1.2} f^{II}(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f^{III}(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots$$

Подставляем в данный ряд вместо $f(0)$, $f^{I}(0)$ и т. д. их значения. Будем иметь

$$f(x) = \text{arctg} x = x - \frac{x^3\, 2!}{3!} + \frac{x^5 .4!}{5!} - \frac{x^7 .6!}{7!} + \frac{x^9 .8!}{9!} - \ldots\ldots$$

Произведя упрощения, получим

$$\text{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots$$

Ниже приводится доказательство того, што функция

$$y^{(n)} = \frac{(n-1)!\, i^{n-1}}{2(1+x^2)^n}\left[(-1)^{n-1}(1-ix)^n + (1+ix)^n\right] \qquad \text{(III)}$$

оказывается действительной при всех вещественных значениях x и n.

Сперва это будет доказано для четных производных, а затем для нечетных.

Итак, предположим, что n четное число.

Разложим цо биному выражение, стоящее в скобках.

$$(-1)^{n-1}(1-ix)^n = (-1)^{n-1}\left[1-nix+\frac{n(n-1)}{1.2}i^2x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}i^3x^3+\ldots\right.$$

$$\left.+(-1)^n i^n x^n\right]$$

$$(-1)^{n-1}(1-ix)^n=(-1)^{n-1}\left[1-nix-\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}ix^3+\ldots\right.$$

$$\left.+(-1)^n i^n x^n\right] \qquad \text{(IV)}$$

$$(1+ix)^n = 1+nix+\frac{n(n-1)}{1.2}i^2x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}i^3x^3+\ldots+i^n x^n$$

$$(1+ix)^n=1+nix-\frac{n(n-1)}{1.2}x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}ix^3+\ldots+i^n x^n \qquad \text{(V)}$$

Т. к. n число четное, то n—1 будет нечетно и $(-1)^{n-1}=-1$.

$$(-1)^{n-1}(1-ix)^n=-1+nix+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}ix^3-\ldots-i^nx^n \qquad \text{(IVa)}$$

Сложив (IVa) с (V), получим

$$(-1)^n(-ix)^n+(1+ix)^n=$$

$$=2i\left[nx-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{5!}x^5-\ldots\right] \qquad \text{(VI)}$$

Заменив в выражении (III) члены, стоящие в квадратных скобках, правой частью равенства (VI), получим

$$y^{(n)}=\frac{(n-1)!i^{n-1}}{2(1+x^2)^n}\cdot 2i\left[nx-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots\right],$$

или

$$y^{(n)}=\frac{(n-1)!i^n}{(1+x^2)^n}\left[nx-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots\right]$$

Т. к. по условию n число четное, то $i^n=\pm1$ (веществ. число). Выражение для $y^{(n)}$ принимает вид

$$y^{(n)}=\frac{(n-1)!(-1)^{\frac{n}{2}}}{(1+x^2)^n}\left[n(nx-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{5!}x^5-\ldots\right] \qquad (VII)$$

В выражении (VII) все члены вещественны.

Таким образом для четных производных требуемое доказано.

Предположим теперь, что n нечетно: тогда $n-1$ будет числом четным и $(-1)^{n-1}=+1$.

Выражение (IV) примет вид.

$$(-1)^{n-1}(1-ix)^n=1-nix-\frac{n(n-1)}{2!}x^2+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}ix^3+\ldots-i^n x^n \qquad (IVb)$$

Сложив (IVb) с (V), получим

$$(-1)^{n-1}(1-ix)^n+(1+ix)^n=2\left(1-\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)\ldots(n-3)}{4!}x^4-\ldots\right)$$

Заменив в выражении (III) члены, стоящие в квадратных скобках, правой частью последнего равенства и приняв во внимание, что при n нечетном $i^{n-1}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ (вещественное число), получим.

$$y^{(n)}=\frac{(n-1)!(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(1+x^2)^n}\left(1-\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)\ldots(n-3)}{4!}x^4-\ldots\right) \qquad (VIII)$$

В выражении (VIII) точно также, как и в (VII) все члены вещественны, следовательно $y^{(n)}$ вещественно и в том случае, когда n нечетное число.

Итак, доказано, что функция $y^{(n)}$, несмотря на присутствие в ней мнимой величины i, действительна при всех вещественных значениях x и n, из чего следует, что при помощи, вышеизложенного способа можно, не выходя из област и вещественных чисел разлагать функцию $y=\operatorname{arctg}x$ не только в ряд Маклорена, возможность чего уже была продемонстрирована, но и в ряд Тейлора.

ГОДНЕВ Т. Н. и ГОЛИЦЫНСКИЙ Д. А.

ВЛИЯНИЕ ВОССТАНОВИТЕЛЕЙ И ОКИСЛИТЕЛЕЙ НА ПРОЦЕСС ЯРОВИЗАЦИИ ПШЕНИЦ

Едва ли не самым большим достижением современного растениеводства надо считать открытие „яровизации"—наиболее правильного средства управления вегетативным развитием растения.

Тов. Лысенко, открывший метод яровизации, характеризует его как метод, дающий возможность заставить растение плодоносить в тех условиях произрастания, в которых оно, по причине климатических условий, плодоносить не может. В основе яровизации лежат два главных положения. Первое—быстрота развития растений, скорость прохождения отдельных стадий развития не зависит от скорости роста растений, от быстроты накопления масы (веса) растений. (Лысенко. Яровизация сел.-хоз. раст. стр 7). Второе — для развития растений требуется ряд известных факторов: свет, влажность, тепло и т д. Все эти факторы, действующие, обычно, на более поздних стадиях, могут оказывать свое действие на стадиях значительно более ранних, вне зависимости от того происходят ли заметный рост растения или нет. Наиболее интересным, в практическом отношении, является то обстоятельство, что можно действовать не только на растение в собственном смысле этого слова, но и на только что наклюнувшееся семя В нем происходит такие, пока еще не известные, биохимические явления, которыя в дальнейшем обусловливают плодоношение. Само название „яровизация" об'ясняется тем, что прием этот прежде всего был применен для превращения озимых растений в яровыя.

Если высеять с весны озимую пшеницу, рожь или другие озимые растения. то они все лето будут расти, сильно раскустятся, но не смотря на самые благоприятные условия, плодоносящих побегов не дадут. Однако их можно заставить плодоносить как яровые. Для этого семена озимых растений проращивают так, чтобы они только наклюнулись, а потом выдерживают на холоду в течении определенного времени. Для каждого сорта озимых растений требуются различные сроки яровизации. Так например: для яровизации озимой пшеницы 808 1/26 Верхнячской станции требуется 23 дня, для Новокрымки 0204—35 дней, для эритроспермум—41 день, Украинки—45 дней, для гостианум 0237—50 дней. Для озимых пшениц необходимо чтобы посевной материал в начале яровизации имел 55% влажности (от абсолютно сухого вещества), а в конце срока яровизации—50%. Температура самого посевного материала во время яровизации должна быть не выше 2—3° Ц и не ниже 0°.

Обработанный таким образом посевной материал „яровизован". Будучи высеян весной, взойдет, выростет и даст колос как яровые семена. Не трудно видеть подтверждение указанного выше положения об отношении между ростом и развитием. Семя озимых, высеянное с весны, но не яровизованное, растет, но биохимических изменений, обусловливающих плодоношение, в проростках не происходит. Наоборот, наклюнувшееся на холоде семя не растет, но в нем происходят изменения, приводящие к образованию колоса. Яровизация озимых растений имеет сравнительно ограниченное практическое значение. Её можно и нужно проводить в районах, где есть опасность осенне-зимней гибели озимых посевов.

Гораздо большее значение имеет яровизация яровых позднеспелых пшениц, какие отличаются высоким качеством семян, но не вызревают в большинстве наших северных районов. Целый ряд ценных Азейберджанских пшениц требует для своего нормального развития на первых стадиях довольно долгого воздействия умеренных температур тогда как весна многих районов Украины, Юго-Востока очень коротка и рано сменяется сухим и жарким летом. С этим природным тормазом, поставленым природой для культивирования в указанных областях наиболее ценных сортов пшениц, можно, оказывается, бороться путем яровизации посевного материала. Семена намачиваются и проращиваются до наклевывания зародыша и выдерживаются при низкой температуре. Продолжительность яровизации, температура ее, а также степень влажности разныя для разных сортов.

Для яровизации твердых позднеспелых пшениц (арнаутка Кочина, арнаутка Немерчанской станции, Горденформе 010 и другие позднеспелые), Лысенко рекомендует доводить влажность посевного материала до 45—50% (от абсолютно сухого вещества) в начале яровизации и до 43 — 45% —в конце срока яровизации. Температура самого посевного материала во время яровизации должна быть не ниже 3° тепла по Ц и не выше 5—6°. Срок яровизации от 10 до 15 дней.

Для яровизации раннеспелых твердых и мягких яровых пшениц, как Полтавки, Белоколоски, Ульки, Гирки, Лютесценс 062, арнаутка Краснокутской станции 069 и др. требуется, чтобы влажность посевного материала была не больше 47—48% и не меньше 43—45% (от абсолютно сухого вещества). Температура в посевматериале во время яровизации должна быть не ниже 8—10° тепла и не выше 15°. Срок яровизации 5—6 дней.

Наиболее подходящие сорта для белорусских условий, равно как и условия их яровизации пока еще полностью не выявлены. Но судя по опытам в Московской области, хорошие результаты могли бы дать арнаутки, горденформе 010, апуликум. Эти данные подтверждаются Минской станцией и опытами нашей лаборатории Не для всех растений развитие их идет лучше при пониженной температуре. Для хлопчатника и др. растений южных шырот благоприятной оказывается температура в 20—25°. Хлопчатник можно значительно продвинуть на север, выдерживая наклюнувшееся, но остановленное в своем росте семя, в течении нескольких дней при этой температуре и затем высевая. Прием этот, однако, до настоящего времени не вполне разработан и потребует в дальнейшем уточнения применительно к разным культурам.

Как мы видим понятие яровизации значительно расширилось. Являясь в начале приемом превращения озимых растений в яровые, оно выросло в метод, пользуясь которым можно дать растению возможность поспевать в обстановке, где отсутствует тот или иной фактор, необходимый для наступления стадии плодоношения. (для озимых-температура близкая к 0°, для позднеспелых яровых-температуры умеренно-холодныя, для растений южных широт-высокая температура их родины). Если этот фактор наряду с другими будет дан не растению, а начавшему прорастать семени, что всегда значительно легче сделать, можно ускорить наступление времени плодоношения.

Температура далеко не единственный фактор, играющий основную роль в процессе яровизации. Для целого ряда растений решающим фактором являются свет или темнота.

Уже очень давно известно, что свет является основным фактором, обусловливающим фотосинтез у зеленых растений. Но этим роль света не исчерпывается. Он имеет так называемое формативное действие. Только получивши известное количество света и будучи известное время в темноте, растительный организм правильно развивается и приступает к плодоношению. В 1920 году Гарнером и Аллардом было открыто явление так называемого фотопериодизма. Эти ученые показали, что ряд растений, например, некоторые виды сои, хорошо выспевающие в южных широтах с коротким летним днем, не выспевают в северных районах с долгим летним днем. Однако эти растения можно заставить плодоносить,накрывая их на изветное время колпаком или помещая их в искуственно затемненное помещение, делая таким образом искусьтвенный короткий день. Многочисленные исследования, произведенные как у нас в Союзе, так и за границей, показали, что все растения можно поделить на три категории: 1) растения, приспособленные к долгому дню—пшеница, овес, картофель; 2) растения, приспособленные к короткому дню—просо, соя, суданка, кукуруза; 3) растения одинаково хорошо растущие и в южных и в северных широтах.

Сокращая искуственно день, можно заставить растения короткого дня развиваться в районах с долгим днем. Освещая искуственно растения долгого дня, можно заставить их плодоносить в районах с натуральным коротким днем. Как не интересно с теоретической стороны явление фотопериодизма, его практическое применение очень ограничено. Управлять вегетационным периодом растения можно только тогда, когда растение выращивается в теплице, где можно затемнять или освещать помещение. Значительный шаг вперед дает поэтому открытие фотопериодического после-действия, сделанное во Всесоюзном Институте Растениеводства (ВИР). Для растений короткого дня ускорение начала плодоношения можно добиться не только сокращением дня, в течения всего вегетационного периода, но и давая искуственнный короткий день только на первых стадиях развития растений. Наоборот, растения длиного дня нужно выращивать в начале их развития на искуственно увеличенном дне. Выращивая рассаду растений в условиях необходимого данному растению светового режима, можно заставить его развиваться значительно лучше в районах с непригодными для него условиями освещения.

Еще дальше идет тов. Лысенко. Он, прежде всего указывает что важно тут не чередование света и темноты, а общее количество этих факторов. Пользуясь далее указанным им выше соотношением между ростом и развитием и возможностью воздействия данного фактора не только на взрослое растение, но и на тронувшееся в рост семя, он предлагает следующий способ сокращения вегетационного периода для растений короткого дня: семена этих растений проращиваются и потом рост их останавливается тем, что влажность семян поддерживается на такой высоте, чтобы растение не росло, но и не гибло от высыхания и выдерживается в продолжении нескольких дней в темноте. Наоборот, наклюнувшиеся семена растений длинного дня выдерживаются при возможно более мощном освящении. После такой обработки, растение дает более раннее плодоношение. Таким образом яровизация из способа перевода озимых растений в яровые, сделалось общим способом управления вегетативным периодом растений. Достаточно изучить всесторонне комплекс факторов, которые наиболее хорошо воздействуют на темпы развитития растений, и поместить в эти условия проросшее, но прекратившее свой рост семя, то результаты получаются такие же, как будто бы этими оптимальными условиями пользовалось само растение,

Теория явления яровизации пока еще почти полностью отсутствует, хотя некоторые высказывания мы по этому поводу имеем. Проф. Максимов в своей статье, помещенной в журнале „Реконструкция сельского хозяйства“ указывает, что значительная ясность в понимании процесса яровизации может быть внесена изучением гормонов, вырабатываемых растением. Сотрудники Лысенко указывают, напротив, на необходимость изучения ферментативного комплекса и его последовательного развертывания во время прорастания семян и во время самой яровизации. Нам думается, что оба эти воззрениая едвали исключают одно другое, так как, согласно последним работам, выполненным в Харьковском Биохимическом Институте и других, действие гормонов в значительной степени сводится к регуляции работы ферментативного аппарата [1]). Что ферментный комплекс имеет огромное значэние в близком к яровизации явлени стимуляции, показали экспериментально Вейхерц и Асмус, изучавшие изменение dk (диастатической силы) в растениях, стимулированных эфиром, этиловым алкоголем, метиловым алкоголем, этилуретаном, фенилуретаном, нитрофенол-ртутью, сулемой, которые действуют стимулирующе на развитие диастатической силы, а также веществ задерживающих это развитие: хлороформа, хлористого этила, хлоралгидрата, пропилового алкоголя, бутилового алкоголя, амилового алкоголя, сенильной кислоты, анилина, эозина, метиленбляу, сероуглерода и танина. При этом выяснилось, что стимуляция сказывается тем больше, чем медленнее сама по себе развивается диастатическая сила. Стимулирующие как прорастание семян, так и развитие диастатической силы, вещества увеличивают проницаемость плазмы. Увеличение проницаемости плазмы, прорастание семян и увеличение диастатической силы идут паралельно. Всю совокупность явлений, происходящих во время развития растения свести только к ферментативному комплексу едвали возможно, т. к. еще покойный акад. Палладин указывал, что в живом организме существует аппарат (гормоны) регулирующий действие ферментов.

В физиологии животных уже давно установился взгляд, что гармоническое развитие всех органов и нормальное развитие организма происходит благодаря выделению клетками особых желез внутренней секреции „инкретов" или гормонов. Многие из этих гормонов удалось получить в химически чистом виде и выяснить их структуру таковы, например адреналин, тироксин и мн. др. Особый интерес представляет изучение фолликулина, так как это вещество, по видимому, обще как животному, так и растительному организму.

Учение о развитии растительного организма было долгое время самым отсталым участком физиологии. Однако за последние годы, здесь удалось добиться значительных успехов. В настоящее время как явления роста в нормальных условиях, так и явления тропизмов об'ясняются с точки зрения учения о так называемом ростовом гормоне. Мы не будем здесь останавливаться на этих явлениях подробно, так как описание их можно найти в статье Холодного, а также в учебнике физиологии растений акад. Костычева. Затронем только важнейшие факты.

---

[1]) Иследование самого последнего времени показали, что точное разграничение гормонов, витаминов и ферментов довольно трудно, т-к известны случаи перехода витаминов вферменты: напр. Витамин B_2 переходит в желтый дыхательный фермент. См. по этому поводу Обзор Витаминов Бомкова (Лейпциг, 1935 стр. 1)

Удаление верхушки колеоптиля овса и др. злаков, вызывает быструю остановку роста. Осторожное наклеивание как этой вершинки обратно, так и верхушек других растений, влечет за собой возобновление роста. Того же результата можно добиться накладыванием кусочка желатины, пропитанной веществом, выделяющимся из положенных на желатину верхушек колеоптиля. Вещество это оказалось общим как всем высшим растениям, так грибам и бактериям. Еще в 1925 г. стало известно, что таким же действием как ростовой гормон обладает и слюна. Однако действие слюны обусловливается выделением ростового вещества находящимися в ней многочисленными бактериями, как это показал Бойсен Иенсен в Копенгагене. Интересно, что наибольшее содержание ростового вещества обнаружили следующие бактерии: Bac. xylinum, Mycobacterium lacticola, Bac mycoides, Bac. subtilis.

Дольк и Тиман показали, что весьма значительные количества гормона вырабатываются грибком Risopus suinus. Им удалось сконцентрировать это вещество до 7.10^{-6} единиц на миллиграм препарата. Было выяснено, что гормон есть слабая кислота, устойчивая по отношению к щелочам и не устойчивая к крепким кислотам. Препараты высокой концентрации удалось также получить Бойсен Иенсену из Aspergillus niger, а Нильсену из Boletus edulis. Все эти вещества оказались идентичными друг с другом по их действию. Однако выделение вещества в химически чистом состаянии удалось только в 1933 году Ф. Кёглю в Ультрехте. Этот ученый предпринял исследование содержания ростового гормона в самых разнообразных веществах животного и растительного происхождения. Оказалось что найбольшее количество ростового гормова, который теперь называют „ауксином" содержится в моче млекопитающих животных и людей (в моче людей от 1000 да 5000 овсяных единиц на миллиграм, лошадей от 1800 до 7000).

150 литров мочи подкислялось до реакции конго и концентрировалось в аппарате Шмальцфус Янсена. Сироп в количестве 25-30 литров подкислялось HCl и экстрагировался эфиром. Эфирная вытяжка сушилась и выпаривалась. Остаток 87 граммов растворялся в 2 литрах эфира и 8 раз встряхивался с бикарбонатом. Соединенные бикарбонатные вытяжки подкислялись до кислой реакции по конго и встряхивались с эфиром. Все эфирные вытяжки соединялись вместе и выпаривались. Остаток 45 граммов. Остаток этот кипятился в течении получаса с 400 куб. см. петролейного эфира и лигроина для удаления неактивных веществ. Остаток 19 гр. растворялся в 60% алкоголе и встряхивался 10 раз с бензолом. Бензойная вытяжка встряхивалась 3 раза с водой и 3 раза с 50% метиловым спиртом. Спиртовая вытяжка выпаривалась, соединялась с водой и экстрагировалась эфиром. Остаток от выпаривания эфира 5 гр. растворялся в 96% алкоголе и обрабатывался концентриро-

ванным раствором уксусно-кислого свинца. Фильтрат по каплям прибавлялся к 30% На ОН до слабо щелочной реакции. Осадок растворялся в разбавленной уксусной кислоте и раствор извлекался эфиром. Иногда почти весь ауксин при подщелачивании пероходит в осадок, иногда в фильтрате так же содержатся значительные количества. В этом случае фильтрат подкисляют, концентрируют до удаления алкоголя и извлекают эфиром. Остаток от выпаривания эфира содержит 60% всего ауксина. Остаток от осаждения свинцов растворяется в 30 см. алкоголя и смешивается с 300 см. воды. К раствору прибавляется концентрированный раствор 6 гр. уксусно кислого кальция и раствор КОН до прекращения выделения осадка. Осадок отфильтровывают, промывают водой и алкоголем. В нем не содержится ауксина. Фильтрат подкисляют уксусной кислотой и извлекают эфиром. Остаток от соединенных эфирных вытяжек представляет из себя прозрачный коричнево красный сироп, который кипятится с 10 см. $1^1/_2$% метилалкогольной хлороводородной кислоты в течении часа. После удаления алкоголя в вакууме, остаток растворяют в эфире и раствор промывают 2 раза 2% бикорбонатом и 2 раза водой. Эфир отгоняют. Оставшийся сироп подвергают фракционной перогонке в вакууме при 0.005 миллиметра. Фракция переходящая между 125° и 135° содержит большую часть ростового вещества. При стоянии она закристаллизовывается. При чем получаются кристаллы двоякогa рода. Одни плавятся при 196°—ауксин и другие —при 173°—лактон ауксина. Вещество в количестве 1 миллиграмма проявляет действие в 50 миллиардов овсяных единиц. По анализу ауксин соотвествует формуле $C_{18}H_{32}O_5$. Строение его еще совсем недавно было не вполне выяснено. Но так как при гидрировании его присоединяется только два водородных атома, то вещество содержит одну двойную связь и одну циклическую группировку. Оно содержит далее одну карбоксильную группу и три гидроксила, являясь таким образом одноосновной кислотой с одной двойной связью и тремя оксигруппами.

В течение 1934 года работами Kögl'я было установлено, что ауксин высших растений состоит, несмотря на полное сходство своего действия, из двух различных веществ.

1). Ауксин „a“ кислота состава $C_{18}H_{32},O_5$ имеющая в составе три ОН.

2) Ауксин „b“ кислота сходная по строению, но имеющая один гидроксил и одну „кето“ группу.

Гидрирование ауксина „a“ позволили получить дигидроауксин „a“, при окислении которого Cr_2O_3 в уксуснокислой среде можно было наблюдать образованне кетона $C_{13}H_{24}O_4$. При окисленин KM_nO_4 оба ауксина в щелочной среде дают двухосновную кислоту $C_{13}H_{24}O_4$,на раз'яснении структуры которой и сосредоточилася дальнейшая работа. Этерефицируя эту кислоту, превращая ее далее в двухатомный гликоль действием $MgJCH_3$ и укарачивая цепь по методу Crieeges и Каррера, удалось получить дикетон с 11 углеродными атомами: 3—7 диметил нонан дион 4.6.

Общий обоим ауксинам продукт кислота $C_{13}H_{24}O$ имеет строение α. α.du sec бутил глутаровой кислоты.

В соотвествии с этим распадом, выясняется и строение самого ауксина.

В основе вещества лежит группировка циклопентана с двойной связью в β β положении, α α водородные атомы замещены вторичным бутилом в обоих ауксинах. β положение в ауксине „a“ замешено остатком α, β. δ, три оксивалериановой кислоты. А в ауксине „b“ тоже β положение замещено β, кето δ оксивалериановой кислотой.

Ауксин бактерий, грибов и других нисшых организмов по действию тождественный, как мы уже видели, с ауксином высших растений по своей химической природе оказался совершенно другим. Это—β индол уксусная кислота, тождественная с синтетически полученной еще в 1925 году Японским исследователем Майямой. Биохимически это вещество получается в результате разложения триптофана. Этот характер соединения делает понятным поведение ростового гормона в электрическом поле, смешаясь против силовых линий поля и переходя при фототропических явлениях на теневую сторону освещенного органа, а при геотропических на нижнюю сторону, что и вызывает соотвествуюшие изгибы. Однако значение ауксина в развитии растительного организма хотя и очень велико, но все-же ограничено. Его роль согласно обстоятельным работам Зединга сводится, к увеличению эластического растяжения клетачных оболочек; к процессу плодоношения, наиболее интересному с точки зрения управления темпами развития, он имеет, во всяком случае, отдаленное отношение. Напротив, большой интерес представляют работы Лёве, выделившаго из семян свеклы и мн. других растений продукт, вызывающий течку у кастрированных мышей и крыс и по спектру в ультрафиолетовой области тождественный с фолликулином, животных. Еще большее значение имеют работы Шиллера, вводившаго в питательную смесь, на каторой выращивались гиацинты и лук, растворы фолликулина в количестве 100, 200 и 300 единиц на литр. В питательных смесях, содержащих 100 и 300 единиц фолликулина, благоприятного действия замечено не было. Но в растворе с 200 единиц цветочныя побеги образовались во всех растениях на 2 недели раньше. Тождество фолликулина и гормона, вызывающаго начало плодоношения у растений, делается еще более вероятным после работ Бутенана и Якоби, получивших кристаллический „токикинин“, по всем данным идентичный с фолликулином. Природа фолликулина благодаря Дуазьи, Бутенану, и др. в настоящее время выяснено окончательно. Углеводород, лежащий в основе как самого фолликулина, так и его производных, получил название „эстрана". Это вещество построено как продукт конденсации частично гидрированного фенантрена с цикло-пентаном.

Углеродные атомы этого основного тела нумеруются согласно принятому для фенантрена порядку. Фолликулин является 3 окси 17 кета эстраном. Фолликулин-гидрат-три окси (3,16.17)-эстран. Структура этого тела была доказана Бутенаном следующим образом.

Фолликулин гидрат переводился действием щелочи в фенол-дикарбоновую кислоту, которая дегидрировалась в оксидиметилфенантрен. Этот продукт может быть получен, как показал Гавард, синтетически из нафталина и ангидрида метилянтарной кислоты.

Родственный фолликулину андростерон отличается лишь степенью гидрирования и присутствием одной лишней метильной группы. Это вещество было синтезировано из ди-гидро-холестерина. что окончательно доказывает родство стеринов и гормонов и указывает на пути, какими они образуются в организме. Очень большой интерес представляет наблюдение, что некоторые синтетические продукты аналогичного строения как 1-аллил I-Окси-I, 2, 3, 4. тетрагидрофенантрен и 2-метил I, 2, 3, 4 тетрагидрофенантрен OH(I) оказались, хотя и значительно слабее, способными действовать на крыс и мышей, как это нашли Блюм и Бергман,

Очень вероятно, что нахождением веществ, построенных аналогично фолликулину, об'ясняется действие экстрактов нефти, бурого каменного угля, торфа и пр., которое открыто Ашзеймом, Сельмаром и др. Эти авторы указывают, что из нефти можно получать продукты, достигающие 400 мышиных единиц на 1 гр. препарата.

Таким образом учение о гормонах в растительном мире перешло из области спекулятивных гипотез в область экспериментального биохимического исследования. Если допустить, как рабочую гипотезу, что при благоприятных условиях прорастания (особых для каждого растения), растение вырабатывает известное количество гормонов, которые в момент своего образования не приявляют действия, а сохраняются в недеятельном состоянии до определенного момента, когда их работа начинает вызывать то или иное специфическое изменение в развитии растительного организма, то явление яровизации стало бы, может быть несколько более понятным. Во время пребывания на холоду для одних растений, при высокой температуре или в темноте для других, происходит, быть может, выработка „гормона плодоношения", избыточное накопление которого и сказывается в более раннем образовании плодов и их созревании. Это, нам кажется, вовсе не исключает, как было уже упомянуто выше, значения в этом явлении ферментативного комплекса, а также биохимических изменений белково-липоидного комплекса, о которых говорят работы акад. Рихтера. Этими работами установлено, что в процессе яровизации происходит смещение изоэлектрической точки белково-липоидного комплекса в кислую область. Это может служить и диагностическим средством для констатации конца яровизации. Само собою разумеется, что мы чужды мысли считать указанное выше предположение об усиленном накоплении гормонов теорией яровизации. Мы указываем на нее как на одно из возможных об'яснений, как ориентировочное предположение для построения схемы опытов, имеющих целью выяснить условия течения явлений, происходящих во время яровизации. Какова бы не было внутренняя сущность биохимических процессов, совершающихся в яровизованном семени, нам кажется одним из возможных условий их выяснения является изучение влияния внешних факторов на этот процесс, то есть в первую очередь действие окислителей и востановителей, действие PH среды, действие веществ изменяющих проницаемость плазмы, сильно влияющих, как показали работы Вейхерца и Асмуса, на действие ферментной системы.

В настоящей статье мы описываем опыты, поставленные летом 1933 года, выясняющие влияние окислителей и востановителей на процесс яровизации. Семена пшениц: Московской озимой 2411, арнаутки Кочина (яровая) и Apulicum (яровая) яровизовались обычным способом по Лысенко, но вместо воды для намачивания семян, брались растворы разных веществ с востановительными или окислительными свойствами. Навеска семян в 4,5 гр. смачивалась 2,7 куб. см. раствора из расчета 60% от воздушно-сухого веса семян. Намачивание произведено 30 марта. После 2 х суточного проращивания, семена I. IV поставлены в маленьких стеклянных баночках с ватными пробками для яровизации на холод При чем температура для озимой пшеницы все время поддерживалась на уровне +1°—+2°, а для яровых —на уровне 3°—5° по Ц. Семена, обрабатываемые газообразными веществами (ацетилен, окись углерода, сероводород) после смачивания водой, клались в такие-же, но открытые баночки и последние помещались в маленькие эксикаторы, заполняемые соотвествующим газом. На холоду семена выдерживались в течении 35 дней, т. е. до 5. V. Пятого мая был произведен посев яровизованых семян в сосуды при 2 х кратной повторности.

Для сравнения и выяснения действия взятых для опыта веществ самих по себе (без участия процесса яровизации) на развитие растений, не подвергавшиеся яровизации семена Apulicum намачивались и проращивались в растворах тех же веществ, которыми пользовались для намачивания подвергавшихся яровизации семян. В качестве востановителей были взяты: глюкоза в концентрациях 1/5 mol, 1/20 mol, 1/50 mol и 1/100; формалдегид в концентрациях 1/100 и 1/200 mol; пирогаллол в концентрациях 1/50 и 1/100 mol; гидрохинон—1/50 и 1/100 mol;

$Fe\,SO_4$. 1/200 и 1/1000 mol; $Fe\,(NO_3)_2$—1/200 и 1/1000 mol окись углерода, ацетилен и сероводород. В качестве окислителей: $KClO_3$—1/200 и 1/1000 mol; Fe'''—1/200 и 1/1000 mol, KIO_3—1/200 и 1/1000 mol.

Всходы появились во всех сосудах одновременно на 4-й день после посева. На первых стадиях развития каких либо резких различий между контрольными и опытными растениями замечено не было. Однако контрольные озимые растения все время сильно кустились, не давая стеблей, тогда как подвергшиеся яровизации перешли к стеблеванию. За несколько дней до начала колошения, наметилось довольно ясное различие между контролем и растениями, выросшими из яровизованных и обработанных пирогаллолом семян. Различие это выражалось в том, что у последних можно было видеть заметное утолщение стебля, указывающее на начало образования колоса, чего у остальных растений не наблюдалось.

Время колошения, стадии зрелости в момент уборки урожая указаны в приводимых ниже таблицах.

ТАБЛИЦА № 1

количество дней от посева пшениц до колошения (509 выколосившихся растений).

Факторы	Название сорта пшеницы			
	Московская оз. 2411.	Арнаутка Кочина.	Apulicum	Apulisum не яровизо.
Контроль	74	60	55	55
Глюкоза 1/5	72	58	54	54
„ 1/20	75	60	53	53
„ 1/50	74	60	53	54
„ 1/100 . . .	73	60	54	55
Формалдегид 1/100 . . .	74	58	54	55
„ 1/200 . . .	72	56	51	52
Гидрохинон 1/50 . . .	73	61	55	55
„ 1/100 . . .	71	62	55	55
Пирогаллол 1/50 . . .	68	54	50	54
„ 1/100 . . .	67	54	49	55
$Fe\,SO_4$ 1/200 . . .	75	60	55	54
„ 1/1000 . . .	70	58	55	55
$Fe_2(SO_4)_3$ 1/200 . . .	—	—	55	55
„ 1/1000 . . .	—	—	52	56
$Fe(NO_3)_2$ 1/200 . . .	—	—	52	53
„ 1/1000 . . .	—	—	48	53
KIO_3 1/200 . . .	74	60	55	55
„ 1/1000 . . .	72	60	55	55
$KClO_3$ 1/200 . . .	—	—	55	55
„ 1/1000 . . .	—	—	55	55
Ацетилен	71	60	55	—
Окись углерода	76	66	57	—
Сероводород	—	—	53	—

ТАБЛИЦА № 2

стадии зрелости к моменту уборки пшениц (в процентах).

Факторы		Московская озимая 2411 на 123 день после посева			Apulicum не яровизован на 109 дней после посева		
		Полная зрелость	Восков. зрелость	Более ранние стадии	Полная зрелость	Восковая зрелость	Более ранние стадии
Контроль		46	27	27	30	60	10
Глюкоза	1/5 . .	60	25	15	36	54	10
"	1/20 . .	47	38	15	33	67	—
"	1/50 . .	55	22	23	25	50	25
"	1/100 .	30	24	46	25	58	17
Формалдегид	1/100 .	45	30	25	20	73	7
"	1/200 .	70	15	15	40	50	10
Гидрохинон	1/50 . .	44	20	36	25	60	15
"	1/100 .	60	24	16	40	50	10
Пирогаллол	1/50 .	74	19	7	30	70	—
"	1/100 .	70	—	30	40	55	5
$FeSO_4$	1/200 .	33	—	67	45	50	5
"	1/1000 .	55	—	45	—	100	—
$Fe_2(SO_4)_3$	1/200 .	—	—	—	46	40	14
"	1/1000 .	—	—	—	30	70	—
$Fe(NO_3)_2$	1/200 .	—	—	—	50	50	—
"	1/1000 .	—	—	—	50	50	—
KIO_3	1/200 .	45	36	19	45	55	—
"	1/1000 .	52	36	12	50	50	—
$KClO_3$	1/200 .	—	—	—	25	55	20
"	1/1000 .	—	—	—	70	30	—
Ацетилен		40	12	33	—	—	—
Окись углерода . .		55	15	45	—	—	—

Рассматривая цифры таблицы № 1, можно видеть, что начало колошения контрольных растений у Московской озимой 2411 произошло на 74 день после посева. У растений выросших из семян обработанных глюкозой колошение началось на 72—75 день; обработанных формалдегидом—на 74 день; гидрохиноном—на 71—73 день; $FeSO_4$—70—75 день; KIO_3—72—74 день; ацетиленом—на 71 день; окисью углерода—на 76 день и пирогаллолом—на 67—68 день.

У Арнаутки начало колошения наступило: контрольных растений на 60 день после посева; обработанных глюкозой—на 58—60 день; формалдегидом—56—58 день; гидрохиноном—на 61—62 день; $FeSO_4$—на 58—60 день; KIO_3—на 60 день; ацетиленом—на 60 день; окисью углерода—на 66 день и пирогаллолом на 54 день.

У Apulicum начались колоситься контрольные через 55 дней; обработанные глюкозой—на 53—54 день; формалдегидом—на 51—54 день; гидрохиноном—на 55 день; $FeSO_4$, KIO_3, $KClO_3$ и окисью углерода—на 55 день; $Fe_2(SO_4)_3$—52—55 день; $Fe(NO_3)_2$—на 48—52 день; ацетиленом—на 57 день; сероводородом—на 53 день и пирогаллолом—на 49—50 день. Таким образом видно, что в отношении наступления времени колошения окислители влияния не оказывают. Востановители, за исключением пирогаллола, действуют слабо положительно. Пирогаллол во всех случаях вызывает ускорение колошения на 5—7 дней против контрольных. Пирогаллол прибавленный к прорастающим семенам, но не яровизованным, ускорения наступления времени колошения не дает, что видно из той же таблицы № 1.

В таблице № 2 так-же видно, что в то время как контрольные растения у Московской озимой пщеницы дают 46% вполне зрелых растений и 27% растений, находящихся в стадии восковой зрелости (растения убраны на 123 день после посева), растения обработанные пирогаллом дают 70% и 74% полной зрелости.

У не подвергавшагося яровизации Apulicum (растения убраны на 109 день после посева), пирогаллол не ускоряет наступление стадии созревания.

Действие пирогаллола, как видно сказывается только на подвергавшемся яровизации материале.

ВЫВОДЫ

Исследовалось влияние востановителей и окислителей на процесс яровизации яровых (Apulicum, арнаутки Кочина) и озимых (Московская 2411) пшениц. Яровизация проводилась по методу Лысенко, но с добавлением при проращивании различных доз окислителей и востановителей. Яровизованные и обработанные вышеуказанным образом, семена высевались в сосуды с почвой в вегетационном домике.

Опытные растения показали:

I. Взятые для опыта вещества, как окислители, так и востановители (за исключением пирогаллола) в применяемых нами концентрациях, заметнага влияния на удлинение или сокращение вегетационного периода не оказывают.

II Пирогаллол в концентрациях 1/50 и 1/100 mol действует ускоряя наступление периода цветения и созревания на 5—7 дней как озимых, так и яровых пшениц.

III. Пирогаллол сам по себе (без яровизации) как стимулятор заметного действия не оказывает.

IV. Не исключена возможность, что пирогаллол как специфическое вещество облегчает течение процессов, происходящих в растениях во время яровизации.

ГОЛИЦИНСКИЙ Д. А. и ГОДНЕВ Т. Н.

К ВОПРОСУ О ЯРОВИЗАЦИИ ЛЬНА.

Летом 1932 г. лабораторией физиологии растений Белорусского Сельско-Хозяйственного Института, была выполнена работа по вопросу о яровизации некоторых сортов льна. [1]) Яровизация проводилась по методу Лысенко действием низкой температуры. Испытанию подвергались 9 селекционных сортов за №№ 1206, 1108, 806, 966, 1155, 1603, 1160, 1159 и 823.

Действию яровизации подвергались набухшие семена, с тронувшимся в рост зародышем. Весь процесс яровизации производился в темноте.

Факторы воздействия: разная температура (+3°, +5°, от —2° до —5°), разная влажность (40%, 45% и 50% от абсолютно сухого веса семян) и разная продолжительность яровизации (5-10, 15, 20 и 30 дней). Опыты велись при двухкратной повторности: в грунте—на земельном участке Горецкого ботанического сада и в сосудах в вегетационном домике. К выполнению работы было приступлено 16-IV. Намачивание семян, а затем и яровизация проводилась в обыкновенных пробирках, закрываемых пробками из ваты. Для каждого варианта бралась навеска в 2 гр. семян с точностью до 0,001 гр.

Варианты с 40%-ой влажностью получили на 2 гр. семян по 0,66 кб. см. воды; с 45% влажности по 0,76 кб см. воды и с 50%—по 0,86 кб. см. воды. Намачивание и проращивание производилось в 5 разных сроков в зависимости от длительности срока яровизации. Намачивание 1-ой порции (с 30 дневным периодом яровизации) было произведено 19-IV и 21. IV эта порция была помещена в термостат для охлаждения.

Проращивание 2-ой порции (с 20 дневным периодом яровизации) произведено 29. IV. Постановка в термостат 1. V.

Проращивание 3-й порции (15 дней яровизации) произведено 4. V. Постановка в термостат 6. V.

4-я порция (10 дней яровизации) пророщена 9. V и поставлена в термостат 11. V. и наконец 5-я порция (5 дней яровизации) пророщена 14. V и поставлена в термостат 16. V.

Термостаты охлаждались при помощи льда. Температура на дне термостата поддерживалась в +3°, а на средней полке в +5°. Таким образом в одном и том же термостате имелись

---

[1]) Работа выполнялась по заданию Горецкой Зональной Льняной Станции.

2 постоянные температуры в $+3^\circ$ и $+5^\circ$, при которых и проводилась яровизация. Калебания от этих постоянных температур не превышали $\pm 0,5^\circ$. Окончен процесс яровизации всех порций одновременно 21. V. 22. V. был произведен посев всех яровизованных семян как в грунт, так и в сосуды. Всходы появились одновременно на всех делянках 26. V.

Яровизация при температуре ниже 0°, проводилась в гор. Орше в холодильнике Оршанского мясокомбината. Яровизация велась в камере с температурой от -2° до -5° в продолжении 24 дней и при влажности в 50%. Проращивание произведено 3. V, постановка в холодильник 5. V, окончание яровизации 29. V и посев 30. V. Всходы появились 4. VI. Участок земли, отведенный для опыта, был взят из под посева картофеля. Два раза вспахан и пробаронен.

Внесено минеральных удобрений: суперфосфата (14% P_2O_5) из расчета 3,5 цент. на 1 га, сильвинита (15% K_2O)—3,5 цент. на га и сернокислого аммония (20% N)—2 цент. на га. Весь участок разбит на делянки площадью в 1/4 кв. м. (50×50 см.). Расстояние между делянками в ряду—20 см. и между рядами —50 см. Количество делянок соотвественно числу вариантов —279 и 27 контрольных.

Всего 306 делянок на все 9 сортов льна. Посев на делянках—рядками на 5 см. один рядок от другого. Учитывая возможность невсхожести некоторых семян, а так же и то, что, слипшиеся после намачивания, семена трудно отделить одно от другого, посев в рядках был сделан густой. После появления всходов лишние растения были удалены и расстояние между отдельными растениями было оставлено в 5 см. (приблизительно). Таким образом на каждой делянке было оставлено по 100 растений. В последствии благодаря появлению на участке медведок, некоторые делянки пострадали от этих вредителей и количество растений на них сократилось. Посев в сосуды произведен в той же последовательности, как и на участке. Путем взвешивания и добавления воды, влажность во всех сосудах поддерживалась одинаковая (60% от абсалютно сухого веса почвы). Как на участке, так и в сосудах, за время вегетации, производилась неоднократная полка сорных трав. К концу вегетационного периода на листьях льна появилась ржавчина, которая, однако, заметного влияния на развитие растений не оказала. В течении всего вегетационного периода велись наблюдения за главнейшими фазами развития растений. Производились промеры длины стеблей: на 20 день после появления всходов, на 40 день и в момент уборки, а также учитывался вес растительной массы (солома и зерно) после снятия урожая. Цыфры, характеризующие высоту стеблей в разные периоды развития растений, дают возможность сделать заключение, что увеличения высоты растений, подвергавшихся яровизации в общем не наблюдается. На ряду с некоторыми вариантами, давшими увеличение длины стебля, имеются также варианты, которые дают уменьшение длины стебля. Получается довольно пестрая картина и подметить определенную закономерность в росте не удается. Можно только отметить, что растения подвергавшиеся 30 дневной яровизации дают для всех сортов льна снижение роста и довольно значительное, (от 1—2 см. до 14—18 см.). У растений яровизовавшихся в течении 5 дней, наоборот, наблюдается некоторое увеличение роста у всех сортов (от 1—2 см. до 12—13 см.). Такое же увеличение роста заметно и у растений, подвергавшихся яровизации в течении 24 дней при температуре от —2° до —5°. Начало цветения (50% зацветших от общего количества растений) почти у всех яровизованых растений начинается на 1, 2 и 3 дня раньше контрольных. Наибольшее ускорение наступления цветения дает сорт № 1159 при 20 и 30-ти дневной яровизации и сорт № 1108 при 5, 10, 20 и 30 дневном сроках яровизации (ускорение на 3—4 дня против контроля). Момент созревания (50% созревших растений на делянке) наступает у большинства яровизованных растений также раньше на 1, 2, 3 дня против контрольных растений. Но лен, подвергавшийся яровизации при более низкой температуре (от —2° до —5°), дает удлинение периода вегетации от 1 до 5 дней. Наибольший эффект в смысле ускорения развития дают сорта 1159, 1160 и отчасти 1108 при продолжительности яровизации 20 и 30 дней. (на 2—4 дня против контроля). Что касается веса созревших растений, то здесь на ряду со значительным увеличением веса опытных растений, имеются варианты, дающие снижение веса.

Только сорт 823 почти для всех вариантов дает прибавку в весе (27 плюсов из 31 варианта), и эта прибавка в среднем достигает 11%.

Сорт 966 дает 18 плюсов, сорт 1160—17 плюсов по 31 варианту. Остальные сорта в большинстве случаев дают снижение веса яровизованых растений против контрольных. Яровизация при температуре ниже 0° (в нашем опыте —2° —5° С) дает увеличение веса опытных растений для всех подвергавшихся яровизации сортов льна за исключением только одного сорта № 1206. Более высокие температуры (+3°, +5°) этого увеличения не дали.

Выводы.

Яровизация 9 сортов льна производилась охлаждением тронувшихся в рост семян по методу Лысенко. Яровизация велась при разной влажности семян и при разной температуре. Отмечалось время появления всходов, начало цветения и момент созревания. Производились также промеры растений в разные периоды их развития и, наконец, учитывался полученный урожай (вес соломы и семян). Можно отметить, что охлаждение проросших семян несколько ускоряет наступление стадии цветения и стадии созревания. Это ускорение незначительно и для большинства сортов измеряется 1—2 днями. Сорта 1159 и 1160 дают 3—4 дня ускорения. Яровизация при более низкой температуре (от —2° до —5° в течении 24 дней), наоборот, дает удлинение вегетационного периода на 1—5 дней, но зато при этом наблюдается увеличение веса растительной массы опытных растений. Что касается величины урожая, то некоторые сорта: 823, 966 и 1160 дали увеличения, а остальные сорта в большинстве случаев дали снижение веса яровизованных растений.

Необходимо дальнейшее исследование в этом направлении с большим количеством сортов и при значительно большей повторности. Так-же желательно возможно полнее изучить влияние химических и физических агентов на процесс яровизации.

Предварительные опыты нашей лаборатории показывают, что воздействие некоторых веществ (например пирогаллола) на яровизуемые семена пшеницы, может сократить вегетационный период. Целесообразно продолжать работу и по изучению ранних сроков посева (сверхранние посевы), ибо опыты с низкими температурами показывают, что охлаждение до —5° тронувшихся в рост семян льна, переносится им без особого вреда.

Н. Н. КАВЦЕВИЧ и Э. А. КОРЗУН.

ОБ ИЗМЕНЕНИИ ВЕГЕТАЦИОННОГО ПЕРИОДА У РАСТЕНИЙ, СЕМЕНА КОТОРЫХ БЫЛИ ПОДВЕРГНУТЫ ВОЗДЕЙСТВИЮ ИСКУССТВЕННЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ

В течение 1933 г. мы продолжили свои исследования влияния физических факторов на семена.

Опыты производились на специальном небольшом участке в г. Горках БССР над семенами томатов „Перета".

В качестве физических факторов были применены освещение ультрафиолетовыми и рентгеновскими лучами, магнитное поле, низкие температуры, электризация и ионизация.

Необходимо отметить, что метереологические условия этого года были весьма неблагоприятны для выращивания томатов. Частые дожди, холода, небольшое число солнечных дней, особенно во второй половине вегетационного периода, отрицательно влияли как на самый рост томатов, так и на их созревание. Мы даже не смогли дождаться частичного созревания плодов и их девятнадцатого сентября пришлось снять зелеными, так как значительная часть их начала портиться. Отсюда ясно, что критерием может только служить сравнение подопытных с контрольными, причем под контрольными надо понимать семена, которые не подвергались никаким искусственным воздействиям и были посажены в одинаковых условиях с исследуемыми.

Порядок опыта заключался в следующем.

Семена подвергались действию определенных физических факторов; девятнадцатого апреля высаживались для проращивания в отдельные ящики с компостной землей. Характер проращивания мало отличался от данных опытов, произведенных в 1932 г. и опубликованных в записках Белорусского Государственного Сельско-Хозяйственного Института (том 1). Девятого июня рассада была перенесена на гряды. Для того, чтобы иметь больше данных для выяснения влияния того или иного физического фактора, некоторые группы семян были высажены на 2 х участках и обозначены соответственно серия № 1 и серия № 2. Количество кустов первой серии для каждого случая бралось от 12 до 17, для 2-ой серии—от 5 до 8.

В отношении появления кустов с цветами и плодами мы ориентировались на массовое цветение и появление плодов, принимая за массовое цветение наличие кустов с цветами или плодами в размере, превышающем 75% их общего числа. Такой подсчет был принят для уменьшения ошибок, так как появление или непоявление даже одного куста с цветами сильно изменяет процент цветения в ту или другую сторону.

Наблюдения производились ежедневно.

Влияние ультрафиолетовых лучей.

Источником ультрафиолетовых лучей служила ртутно-кварцевая лампа „Lummer Straubel'я" с поглощаемой мощностью 60 watt при напряжения 15 вольт. Пучек лучей был направлен на площадку, на которой были размещены семена одним слоем в расстоянии 7,5 см. от горелки. Сухие семена освещались в течение 4 х дней 5 раз с временем действия в 5, 10, 10, 15 и 5 минут.

У семян первой серии массовое цветение наступало на 6 дней раньше, а массовое появление плодов на 4 дня раньше контрольных.

Средний сбор с куста на 40% больше, чем у контрольных.

Вторая серия: у семян, освещаемых ультрафиолетовыми лучами, массовое цветение наступило на 11 дней раньше контрольных, массовое появление плодов—на 9 дней раньше, чем у контрольных. Средний сбор с куста на 80% больше чем у контрольных. Предварительно пророщенные семена и облученные ультрафиолетовыми лучами в течение 15 минут, дали массовое цветение на 12 дней раньше, а массовое появление плодов на 8 дней раньше контрольных.

Средний сбор с куста на 29% больше чем у контрольных.

Влияние постоянного электромагнитного поля

Электромагнитное поле было образовано электромагнитом с поглощаемой мощностью 160 watt при силе тока 8 ампер. Напряжение поля порядка 200 гаусс. Семена вносились в поле 4 раза в течение 4-х дней, причем продолжительность действия каждый раз—15 минут. Цветение и появление плодов наступило почти одновременно с контрольными.

Средний сбор с куста у 1-й серии на 18%, а у 2-й серии на 4% выше чем у контрольных.

Предварительно пророщенные семена и затем введенные в указанное магнитное поле на 20 минут в отношении времени появления цветов и плодов не дали особой разницы по сравнению с контрольными. Средний сбор с куста на 38% оказался выше чем у контрольных.

Влияние ионизации

Предварительно пророщенные семена в течение 20 минут подвергнуты ионизации. Семена укладывались на картонный круг, который устанавливался на изоляторах под стеклянным колпаком. Над картоном сверху в расстоянии 4 см. находились медные острия, впаянные в металлический диск. К диску присключался через выпрямитель Виллярда отрицательный полюс индуктора с напряжением порядка 70000 вольт, положительный полюс спирали заземлялся. При работе индуктора на семена направлялся поток отрицательных ионов. Массовое цветение наступило на 5 дней, а появление плодов на 2 дня раньше чем у контрольных. Средний сбор с куста на 11% больше чем у контрольных.

Влияние низкой температуры

В качестве среды низкой температуры пользовались жидким воздухом, который, как известно, под атмосферным давлением имеет температуру около минус 194° С. Семена томатов были продержаны в жидком воздухе в течение 20 часов, после чего были высажены.

Массовое цветение наступило на 7 дней, а массовое появление плодов на 8 дней раньше чем у контрольных. Средний сбор с куста получился на 14% больше чем у контрольных.

Одновременно был произведен следующий опыт Семена томатов были продержаны в течение 12 часов в жидком воздухе, затем были вынуты и погружены в 0,7% раствор поваренной соли. Через трое суток были вынуты из раствора и через них был пропущен в течение 14 часов постоянный электрический ток плотностью в среднем 0,2 А на 1 дм.^{2}. После этого семена снова были помещены в тот-же раствор на 8 часов. Массовое цветение наступило на 8 дней раньше, а массовое появление плодов на 5 дней раньше контрольных. Средний сбор с куста на 7% ниже чем у контрольных.

Семена, подвергнутые одной электризации указанным способом, дали цветение на 6 дней, а массовое появление плодов на 4 дня раньше контрольных.

Средний сбор с куста оказался на 13% выше, чем у контрольных.

Действие рентгеновских лучей.

Источником рентгеновских лучей служила ионная трубка. Жесткость лучей была ограничена длиной волны примерно $2 . 10^{-9}$ см Семена помещались от трубки в расстояние 15 см. и были подвергнуты освещению в течении двух дней всего два раза по 15 минут каждый раз.

Массовое цветение наступило на 6 дней раньше, а массовое появление плодов на 4 дня раньше контрольных. Средний сбор с куста на 2% меньше чем у контрольных.

Проращенные семена были подвергнуты освещению рентгеновскими лучами при тех же условиях один раз в течение 20 минут.

Массовое цветение наступало на 5 дней, а массовое появление плодов на 6 дней раньше, чем у контрольных (таблицы см. на 89 и на 90 стран.).

* * *

Из изложенного видно (см. табл. 1 и 2), что применение искусственных физических воздействий на семена оказывает влияние в сторону сокращения вегетационного периода. Однако сделать в этом направлении совершенно категорический вывод пока невозможно. Необходимо массовое проведение опытов в различных климатических и почвенных условиях при самых разнообразнх вариантах дозировок.

ТАБЛИЦА 1.

количество кустов с цветами (выражено в %)

Дата наблюдения	Семена подвергнутые воздействию жидкого воздуха.	Контрольные.	Воздействие жидкого воздуха и электризации.	Контрольные.	Семена подвергнутые электризации.	Контрольные.	Воздействие магнитного поля 1 серия.	Контрольные 1 серия.	Воздействие магнитного поля 2 серия.	Контрольные 2 серия.	Семена предварительно пророщенные затем магнит. поле.	Контрольные.	Освещенные ультрафиолетовыми лучами 1 серия.	Контрольные 1 серия.	Освещенные ультрафиолетовыми лучами 2 серия.	Контрольные 2 серия.	Предварительно пророщенные затем ультрафиол. лучи.	Контрольные.	Освещенные рентгеновскими лучами	Контрольные.	Семена пророщенные, затем рентгеновские лучи.	Контрольные.	Семена пророщенные затем ионизация.	Контрольные.
19-VII			38		8								6		20		50		12					
20-VII			50		23								17		60		83		23				25	
21-VII			56		54								28		80		83		35		8		25	
22-VII	20		69		54								39		80		83		35		17		38	
23-VII	40	20	81	8	69	8		8		20		20	72	8	100	20	100	20	59	8	17	20	50	20
24-VII	40	20	81	15	69	15		15		20		20	72	15		20		20	59	15	17	20	50	20
25-VII	100	20	94	15	85	15	15	15	40	20	20	20	78	15		20		20	82	15	58	20	50	20
26-VII		20	94	15	85	15	15	15	40	20	30	20	78	15		20		20	89	15	83	20	50	20
27-VII		20	94	15	85	15	23	15	40	20	30	20	83	15		20		20	89	15	92	20	75	20
28-VII		20	94	15	85	15	31	15	60	20	30	20	89	15		20		20	89	15	92	20	100	20
29-VII		40	100	15	92	15	31	15	60	40	50	40	89	15		40		40	89	15	92	40		40
30-VII		60		46	100	46	54	46	100	60	70	60	100	46		60		60	100	46	92	60		60
31-VII		60		92		92	69	92		60	70	60		92		60		60		92	100	60		60
1-VIII		100		100		100	100	100		100	100	100		100		100		100		100		100		100

ТАБЛИЦА 2.

Количество кустов с плодами (выражено в %)

Дата наблюдения.	Семена подвергнутые воздействию жидкого воздуха.	Контрольные.	Воздействие жидкого воздуха и электризации.	Контрольные.	Семена подвергнутые электризации.	Контрольные.	Воздействие магнитного поля 1 серия.	Контрольные 1 серия.	Воздействие магнитного поля 2 серия.	Контрольные 2 серия.	Семена предварительно пророщенные затем магнит. поле.	Контрольные.	Освещенные ультрафиолетовыми лучами 1 серия.	Контрольные 1 серия.	Освещенные ультрафиолетовыми лучами 2 серия.	Контрольные 2 серия.	Предварительно пророщенные затем ультрафиолет. лучи	Контрольные.	Освещенные рентгеновскими лучами.	Контрольные.	Семена пророщенные, затем рентгеновские лучи.	Контрольные.	Семена пророщенные затем ионизация.	Контрольные.
29-VII																			18					
30-VII			13		15										40				18				25	
31-VII			13		23								22		60				18		17		25	
1-VIII	20	20	38		39				20	20		20	44		100	20	67	20	41		42	20	25	20
2-VIII	100	20	63		54		8		40	20	20	20	56			20	100	20	59		42	20	25	20
3-VIII		20	69		69		23		60	20	30	20	61			20		20	71		50	20	25	20
4-VIII		20	75		69		23		60	20	30	20	72			20		20	71		75	20	50	20
5-VIII		20	81		77		23		60	20	30	20	78			20		20	82		75	20	50	20
6-VIII		40	81	31	77	31	31	31	60	40	30	40	78	31		40		40	89	31	92	40	63	40
7-VIII		40	81	54	77	54	46	54	80	40	40	40	78	54		40		40	100	54	100	40	63	40
8-VIII		60	100	69	100	69	46	69	80	60	50	60	89	69		60		60		69		60	75	60
9-VIII		60		85		85	46	85	88	60	50	60	89	85		60		60		85		60	88	60
10-VIII		80		92		92	54	92	100	80	50	80	100	92		80		80		92		80	100	80
11-VIII		100		100		100	77	100		100	70	100		100		100		100		100		100		100
12-VIII							100				100													

ЗМЕСТ

Райліт № 244. Заказ № 599—1000 экз. Горкі, Друкарня С-Г Інстытута