Пралятарыі ўсіх краёў, злучайцеся!

ЗАПІСКІ

БЕЛАРУСКАЙ ДЗЯРЖАЎНАЙ АКАДЭМІІ
СЕЛЬСКАЕ ГАСПАДАРКІ
ІМЯ КАСТРЫЧНІКАВАЙ РЭВАЛЮЦЫІ

№ 2

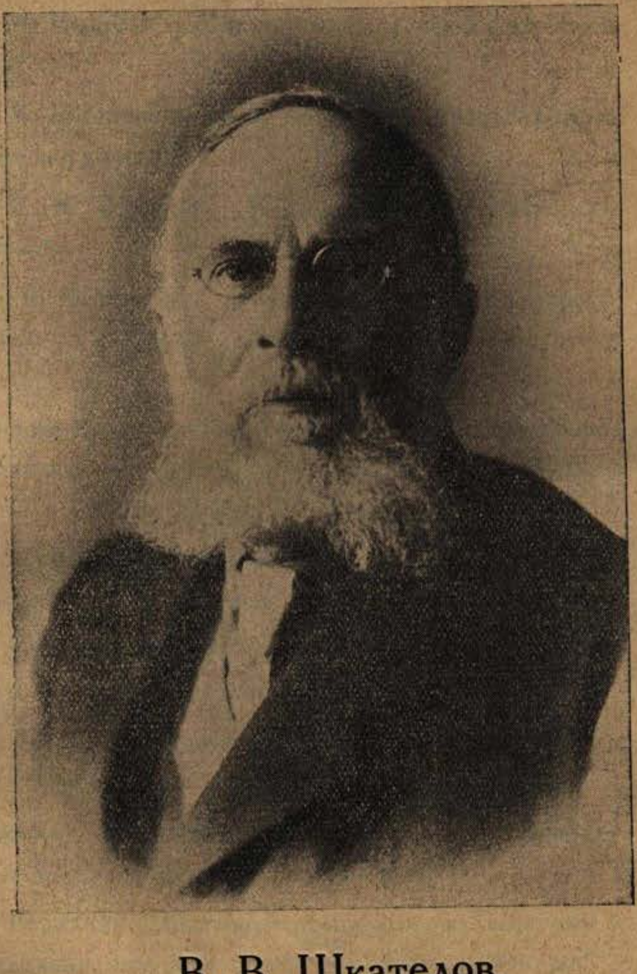
ЗАПИСКИ

БЕЛОРУССКОЙ ГОСУДАРСТВЕННОЙ АКАДЕМИИ
СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
ИМЕНИ ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ

ГОРКІ, БССР.
ВЫДАВЕЦТВА АКАДЭМІІ
1926

ЗЬМЕСТ

Горрайлітбел № 18607. Зак. № 678. Тыр. 500 экз.



В. В. Шкателов.

1886—1926.

Профессор В. В. Шкателов.

(к 40-летию его научной деятельности).

9 ноября сего 1926 года исполнилось 40 лет деятельности профессора Владимира Викторовича Шкателова, работающего ныне в Белорусской Государственной Академии Сельского Хозяйства.

Имя В. В. хорошо знакомо не только русским лесоводам, но и пользуется известностью в западно-европейской специальной литературе. Академия Сельского Хозяйства, высоко ценя научную, учебную и практическую деятельность В. В., постановила отметить 40-летний юбилей в жизни почтенного ученого и принять в праздновании этого дня участие всеми 4-мя факультетами Академии.

В. В. Шкателов родился 7 мая 1861 г. в С.-Петербурге*). Отец его был небольшой чиновник одного из учреждений ведомства финансов. Уже в в 9-летнем возрасте он теряет своего отца и остается всецело на попечении своей матери, которая и дает ему последующее воспитание.

Среднее образование В. В. получает сначала во 2-ой, а потом в 1-ой классической гимназии. Отсюда по окончании 7-ми классов, он поступает в 1878 году по особому экзамену в Московское Техническое Училище, которое и оканчивает успешно по химическому отделению в 1884 году с званием инженер-технолога и награждением особым нагрудным знаком.

По отбытии в том же 1884 г. 3-х месячной воинской повинности, в качестве вольноопределяющегося I разряда, В. В. увольняется в запас и поступает сначала на службу на Московско-Брестскую железную дорогу в качестве лаборанта, где ведет разные работы по испытанию железнодорожных материалов.

9 ноября 1886 года В. В. избирается в ассистенты Петровско-Разумовской Земледельческой Академии к проф. В. М. Рудневу, под авторитетным руководством которого он и занимается сельско-хозяйственной технологией, продолжая оставаться на железно-дорожной службе вплоть до конца 1893 года. Лесной технологией В. В. в это время приходится заниматься лишь с немногими лесоводами-дипломниками, так как Лесное Отделение Академии в это время (с 1886 г.) было уже закрыто.

Служа одновременно ассистентом Академии и лаборантом М.-Б. ж. д., В. В. занимается исследованием химического состава смол и, главным образом, русской живицы и канифоли, плодом какового исследования и явилась напечатанная им диссертация „О химическом составе смол“. По защите этой работы 10 декабря 1889 г. В. В. удостаивается Педагогическим Советом Технического Училища редкого для того времени звания „ученого инженер-технолога“. Звание это в последующие годы отвечало примерно званию „ад‘юнкта Института“ или даже ученой степени доктора.

Указанная работа имела большое значение. В начале 90-х годов наш знаменитый химик Д. И. Менделеев, основываясь на данных работы В. В., пропагандировал в своем „Толковом Тарифе“ повышение ставок

---

*) Все даты в настоящем очерке показаны по новому стилю.

на иностранные скипидар и смолы и как-бы попутно давал с своей стороны благоприятную рецензию указанному труду В. В.

Эта же работа сыграла и в дальнейшем свою роль. В 1893 г. набирался преподавательский персонал во вновь преобразованный в то время Ново-Александрийский Институт сельского хозяйства и лесоводства. Бывший в то время управляющий Институтом знаменитый русский почвовед В. В. Докучаев приглашает В. В., по рекомендации известного в то время проф. Петровской Академии Г. Г. Густавсона, в Ново-Александрию на должность ад'юнкт-профессора по кафедре сельско-хозяйственной и лесной технологии, но каковую должность он и зачисляется с 14 января 1894 года.

В Ново-Александрии В. В. остается до средины 1914 года, когда, вследствие разразившейся мировой войны, Институт со своим учебным персоналом вынужден был эвакуироваться в гор. Харьков. Таким образом, в Ново-Александрии В. В. остается в продолжении свыше 20 лет. В декабре 1896 г. он назначается ординарным профессором по занимаемой кафедре сельско-хозяйственной и лесной технологии.

За время своего пребывания в Ново-Александрии В. В. участвует в строительстве Института. Здесь им, в сотрудничестве с Н. А. Кугушевым, устраивается газовый завод. Затем, им же в 1898 г., но без посторонней помощи, устраивается завод сухой перегонки дерева для практических занятий со студентами Лесного Отделения. Впервые на этом заводе В. В предсказывает большую будущность древесному газу для освещения с лампочками накаливания (Ауэровские газовые горелки), что, как известно, впоследствии вполне оправдалось в жизни.

На протяжении своего долголетнего пребывания в Ново-Александрии В. В. занимает самые разнообразные должности по административной и учебной части, вплоть до исп. об. директора Института.

В. В. не раз поручалось заведывание техническими сооружениями Института, ему же приходилось в течение некоторого временни брать на себя и заведывание химической лабораторией. Помимо сельско-хозяйственной и лесной технологии Институтом поручалось ему чтение курсов: то органической, то неорганической, то даже агрономической химии.

Справедливость требует отметить, что В. В. со всеми возглагавшимися на него в порядке отдельных поручений обязанностями справлялся, вследствие живости своего характера и практичности, вполне успешно и он являлся видным и ценным работником Ново-Александрийского Института Сельского Хозяйства и Лесоводства.

Его подвижность и жажда знания давала ему возможность почти ежегодно бывать в командировках то в России, то за границею.

С переводом в Харьков живая деятельность В. В. продолжается и в Харьковском Сельско-хозяйственном Институте, в который был переименован эвакуированный туда Ново-Александрийский Институт.

В 1919 г. по представлению Совета Харьковского Сельско-хозяйственного Института за 25-летнее пребывание в звании профессора В. В. получает звание заслуженого профессора названного Института.

В 1923 г. пленумом Сельско-хозяйственного Научного Комитета Украины В. В. избирается в члены этого Комитета.

В июле того же 1923 г., оставаясь пока в Харькове, В. В. переходит на службу в гор. Минск, на кафедру сельско-хозяйственной и лесной технологии в Белорусский Государственный Институт Сельского и Лесног Хозяйства, по приглашению б. своего ученика проф. А. Т. Кирсанова ректора и организатора этого Института. В. В и здесь принимает по сильное участие в строительстве и в частности устраивает газовый завод для учебно-вспомогательных учреждений.

С июня 1924 В. В. оставляет службу в Харьковском Сельско-хозяйственном Институте и окончательно переселяется в гор. Минск.

С 1 октября 1925 г., вследствие слияния двух Белорусских Сельскохозяйственных Институтов: Минского и Горы-Горецкого и образования из них Белорусской Государственной Сельскохозяйственной Академии, В. В. по приглашению Главпрофобра переезжает к новому месту службы в Горы-Горки.

Хотя В. В. был профессором сельскохозяйственной и лесной технологии, но в научных своих работах большее внимание им уделялось лесным вопросам, к которым у него было главное тяготение.

Владея хорошо французским языком, В. В. свои работы сам довольно подробно резюмировал на этом языке Одна из его работ была издана в Париже на французском языке. Впоследствии работа эта по просьбе лаборатории „Исследования смол“, затем расширившейся в крупное исследовательское учреждение „Institut de Pin“, была издана Бордоским Университетом отдельным изданием.

В свое время В. В., находясь в научном контанкте с заведывающим указанной лабораторией проф. Vezès, пожертвовал ей целую коллекцию смоляных кислот в чистом виде, полученных им от разных видов сосны: русских, французских и американских.

Много лет спустя, когда В. В. в 1925 г. собирался вновь посетить Францию—страну образцовой подсочки—для ознакомления с новейшими достижениями в деле подсочки, он мог приятно убедиться из переписки с директором Institut de Pin проф. Dupont, что имя его там хорошо известно и что французы желали бы видеть его своим гостем.

Ланды были В. В. посещены 3 раза: в 1907, 1908 и 1912 г.г., а французский способ подсочки получил в его лице убежденного поборника.

В немецкой литературе работы В. В. цитируются, например, в 1908 г. в „Ghemisches Centralblatt“ и, далее, у Friedrich'a Czapek'a в „Biochemie der Pflanzen“, B. III, 2-te Auflage, Jena. 1921., в отделе „Die Harzsubstanzen“. Автор этого капитального 3-х-томного труда приводит данные из французской работы В. В. и отводит последней сравнительно много места, сопоставляя ее с исследованиями западно-европейских ученых.

Нечто подобное повторяется и в недавней работе П. А. Боброва „Смолокурение и его продукты“, помещенной в „Трудах Вятскаго Научно-исследовательскаго Института Краеведения“, Том II, 1926, где автор уделяет много внимания работам В. В., при чем то сопоставляет добытые результаты с такими же иностранных ученых, то подчеркивает оригинальность полученных В. В. данных, то констатирует подтверждение результатов иностранными учеными и т. п. Интереснее всего то, что П. А. Бобров в своих суждениях о соответствующих работах В. В. пользуется, главным образом, иностранною литературою...

Во время своей многолетней службы В. В. работал по подсочке в Пермской губ., Польше, Крыму, Украине, а с 1925 г. стал работать в Белоруссии.

Бывший лесной департамент министерства земледелия очень ценил знания и авторитет В. В. и, начиная с 1910 по 1914 год, ежегодно приглашал его на совещания по лесному опытному делу. Здесь давались ему по его представлениям разного рода поручения и отпускались на производство работ соответствующие суммы. В отчетах по опытному лесному делу за указанные годы можно найти результаты исполненных В. В. работ и предположения о предстоящих в следующем году (за отчетным) работах.

С 1 октября 1926 г. при Центральной Лесной Опытной Станции Белоруссии образован Отдел лесной технологии и, следовательно, В. В., как авторитетному заведывающему этим Отделом, предоставлена полная возможность поработать и в белорусских лесах по интересующим его и Лесное Управление Республики вопросам лесной технологии.

Говоря о научной деятельности В. В., надлежит указать, что он является одним из первых исследователей, остановившихся на высоких качествах русского скипидара. На основании своих работ В. В. определенно считает русский скипидар неизмеримо выше американского и, повидимому, даже выше французского скипидара.

Лаборатория В. В. как-то всегда умела одной из первых отмечать у себя всякие новинки по лесной технологии, к которым она была особенно чувствительна. На это в свое время было обращено внимание еще проф. Н. Ст. Нестеровым в издававшемся им „Лесопромышленном Вестнике“.

В настоящее время в Лаборатории В. В. изготовлены, например, альбомы с образцами бумаги, полученной им из следующих древесных пород: ели, сосны, березы, осины и ольхи.

В последнюю свою поездку в Крым, летом 1926 г. В. В. вновь заинтересовался добыванием живицы и канифоли из крымской сосны.

К особенности характера В. В. надлежит отнести его органическую нелюбовь ко всякого рода саморекламе и, действительно, в своих работах он неизменно оставался далек от нее, при том до самаго последняго времени.

В заключение нельзя не отметить и того обстоятельства, что В. В. не чужд был и общественной деятельности. В разное время им был прочитан целый ряд публичных лекций по наиболее важным экономическо-техническим вопросам, как-то: о нефти, каменном угле, холодильном деле, атмосферном азоте и его утилизации, искусственном каучуке и т. п. Точно также В. В. участвовал и на многочисленных с‘ездах, из которых можно особо отметить несколько Менделеевских и два холодильных с‘езда—в Париже и Москве.

Заканчивая настоящий очерк о жизни и деятельности юбиляра, надлежит указать, что В. В. продолжает и в Белорусской Государственной Академии Сельского Хозяйства пользоваться таким же авторитетом и уважением, какими он до сего времени пользовался в Ново-Александрии, Харькове и Минске, как среди своих сослуживцев—научных работников, так и среди своих учеников—студентов, а равно и технических служащих, с которыми ему приходится по своей деятельности так или иначе сталкиваться.

Вступив в 41-ую годовщину своего служения Высшей Сельско-хозяйственной Школе, В. В. чувствует себя вполне бодрым для дальнейшей успешной научной работы. Как и раньше, он продолжает интересоваться естественными и преимущественно лесными богатствами в техническом отношении. Только теперь его мысль и внимание всецело устремлены на указанные богатства Белоруссии, которой В. В. и предполагает посвятить дальнейшие годы своей трудовой жизни.

ПЕРЕЧЕНЬ

наиболее значительных печатных работ профессора В. В. Шкателова*).

1.** О составе русской смолы из Pinus sylvestris. Ж. Р. Ф.-Х. О. 1888.

2. О химическом составе смол (диссертация). Москва. 1889.

3. О нефтяно-газовой смоле и о применении ее для получения ароматических углеводородов и анилиновых красок. Т. Сб. и В. Пр. 1893.

4. О подсочке русской сосны. Лесн. Журн. 1895.

5. Нефть. Публичная лекция. Варшава. 1896.

6. О тождестве абиэтиновой кислоты с одним из изомеров сильвиновой. Ж. Р. Ф.-Х. О. 1897.

7. О живице различных хвойных, ее составе и свойствах и о новом способе получения скипидара и канифоли. Зап. Ново-Александр. Института. 1897.

8. Каменный уголь. Варшава. 1900.

9. Нефтяно-газовый завод Ново-Александр. Инстит. Варшава. 1898.

10. Коньяк. Варшава. 1900.

11. Переработка меласной патоки на поташ. Т. Сб. и В. Пр.

12. О синтезе сахаристых веществ. Т. Сб. и В. Пр.

13. О новом открытии Гольдшмидта (аллюминотермия) Т. Сб. и В. Пр.

14. О приготовлении коньяка. Т. Сб. и В. Пр.

15. О получении соды по способу Ставели. Т. Сб. и В. Пр.

16. О нахождении щавелевой кислоты на скалах южного берега Крыма. Ж. Р. Ф.-Х. О. 1906.

17. С родины подсочки. Лесопром. Вестн. 1907. №№ 31, 34 и 35.

18. Sur la composition des differents conifères de la gemme et colophane. „Moniteur scientifique“. Paris. 1908.

19. Об искусственном охлаждении. В „Хозяйстве“. Киев. 1911.

20. Опыты подсочки сосны по французскому способу в казенной лесной даче Руда Люблинской губ. Тр. по лесн. оп. делу. 1912.

---

*) Приняты следующие сокращения наименований журналов: Ж. Р. Ф.-Х. О.—Журнал Русского Физико-Химического Общества; Т. Сб. и В. Пр.—Технический Сборник и Вестник Промышленности.

**) Работы за №№ 1, 2, 3, 4, 6, 7, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26 и 27 являются самостоятельными научными работами, а остальные номера показывают статьи и издания научного характера.

21. О новом способе получения сахара кустарным путем. Доклад. Харьков. 1917.

22. О составе золы Крымской водоросли Cystoseira barbata и о нахождении брома, иода и калиевых солей. Ж. Р. Ф.-Х. О. 1917.

23 О подсочке на Севере России. Журн. Сельск. Хоз. и Лесоводства. 1917.

24. К вопросу о выпрямлении окружностей и приближенной величине π. Зап. Бел. Гос. Инст С. и Л. Хоз. 1924.

25. Древесно-газовый завод Бел. Инст. С. и Л. Хоз. В „Зап. Бел. Инст. С. и Л. Хоз.“ 1925.

26. Об окислительной способности русскоо скипидара из Pinus sylvestris. Зап. Бел. Гос. Инст. С. и Л. Хоз. 1925 г.

27. О подсочке сосны в Белоруссии. Зап. Бел. Гос. С. Х. Академии. 1926.

Кроме того перу В. В. принадлежат все статьи по лесной технологии и многие по сельско-хозяйственной в „Полной Энциклопедии русского сельск. хозяйства“. Изд. Девриена. 1910.

Таким образом, общее число всех печатных работ В. В. будет равно не менее 60.

Проф. А. КОСТЯЕВ.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ

полос формы трапеции аналитическим методом.

Пусть требуется нам разбить участок формы трапеции на полосы той же формы линиями, параллельными основаниям данной трапеции.

При этом безразлично, будет ли трапеция прямоугольной или косоугольной.

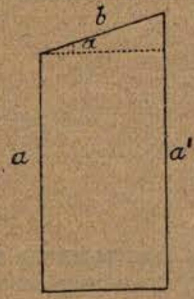
В моем курсе „Землеустроительное Проектирование“ (Москва, Госиздат, 1925 г.) разобран способ проектирования таких участков, и при работе без счетных машин способ этот можно рекомендовать предпочтительно перед всякими другими, но при наличии счетной машины можно работу проектирования ускорить, пользуясь прилагаемыми ниже способами.

Прежде всего напомним, что проектирование трапеции рекомендуемым в моем курсе способом состоит из следующих операций: 1) вычисления второго основания a' по формуле

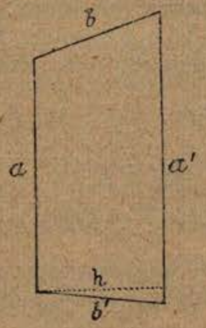
$$a' = \sqrt{a^2 + 2Q\,tg\,\alpha} \qquad (*)$$

для прямоугольной (см. черт. $1^{\text{-а}}$) и по формуле

$$a' = \sqrt{a^2 + 2Q\,(tg\,\beta + tg\,\gamma)} \qquad (**)$$



Черт. 1-а.



Черт. 1-б.

для косоугольной трапеции (см. черт. $1^{\text{-б}}$), где a есть данное основание трапеции, Q—ее площадь, α—угол между боковыми сторонами, а β и γ—углы боковых сторон с высотой трапеции; 2) вычисления высоты h по формуле

$$h = \frac{2Q}{a + a'}$$

и 3) вычисления боковых сторон по формулам:

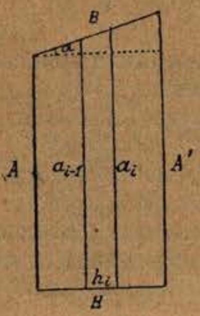
$$b = \frac{h}{\cos\alpha} \qquad (\text{см. чер. } 1^{\text{-а}}),$$

$$b = \frac{h}{\cos\beta} \qquad (\text{„ „ } 1^{\text{-б}}),$$

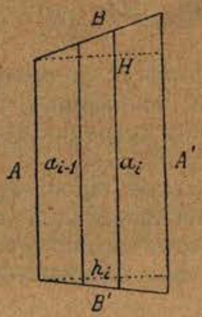
$$b' = \frac{h}{\cos\gamma} \qquad (\text{„ „ „}),$$

и вот операция вычисления второго основания, связанная с извлечением квадратного корня, при которой преимущества счетных машин перед таблицами уже становятся до некоторой степени сомнительными, может быть заменена по предлагаемому способу другой, более быстро выполняемой и не связанной с извлечением квадратного корня операцией, в чем и заключается значительное преимущество этого способа.

Пусть дан для разбивки на полосы участок формы прямоугольной (см. черт. $2^{-а}$) или косоугольной (черт. $2^{-б}$) трапеции, в котором меньшее основание A, большее A' и высота H.



Черт. 2-а.



Черт. 2-б.

Будем вести счет проектируемых полос слева от основания A и обозначим их основания, высоты и площади соответственно через

A , a_1 , h_1 и q_1 для полосы $1^{-й}$,

a_1 , a_2 , h_2 и q_2 „ „ $2^{-й}$,

. . . .

a_{i-1} , a_i , h_i и q_i „ „ $i^{-й}$,

. . . .

a_{n-1} , A', h_n и q_n „ „ $n^{-й}$ и последней.

Тогда полоса номер i будет иметь (см. черт. $2^{-а}$ и $2^{-б}$) меньшее основание a_{i-1} , большее a_i , высоту h_i и площадь q_i .

Для случая прямоугольной трапеции мы имеем:

$$a_i - a_{i-1} = h_i \, tg \, \alpha \quad (1) \quad ,$$

а для косоугольной трапеции соответственно

$$a_i - a_{i-1} = h_i \, (tg \, \beta + tg \, \gamma) \quad (2) \quad .$$

При проектировании трапеции под номером i мы будем иметь величину a_{i-1} , и если каким-либо способом мы определим величину разности

$$a_i - a_{i-1} \quad ,$$

то по ней найдем затем второе основание a_i и среднюю линию m_i ; для удобства же вычисления m_i найдем непосредственно

$$m_i - a_{i-1} = \frac{1}{2} (a_i - a_{i-1}) \quad ,$$

вместо

$$a_i - a_{i-1} \quad ,$$

и формулы (1) и (2) заменим соответственно формулами

$$m_i - a_{i-1} = \frac{1}{2} h_i \, tg\, \alpha \qquad (3)$$

и

$$m_i - a_{i-1} = \frac{1}{2} h_i \, (tg\, \beta + tg\, \gamma) \qquad (4) \quad .$$

Принимая во внимание, что

$$tg\, \alpha = \frac{A' - A}{H}$$

и

$$tg\, \beta + tg\, \gamma = \frac{A' - A}{H}$$

и подставляя в формулы (3) и (4) вместо

$$tg\, \alpha \text{ и } tg\, \beta + tg\, \gamma$$

их значения, получим общую формулу, как для прямоугольной, так и для косоугольной трапеции:

$$m_i - a_{i-1} = \frac{h_i \, (A' - A)}{2H} \qquad (5) \quad .$$

Заменяя в формуле (5) высоту h_i ее величиной

$$h_i = \frac{q_i}{m_i} \quad ,$$

получим

$$m_i - a_{i-1} = \frac{q_i \, (A' - A)}{2H \, m_i} = \frac{A' - A}{2H \, m_i} \, q_i \quad ,$$

или иначе

$$m_i - a_{i-1} = k_i \, q_i \qquad (6) \quad ,$$

где

$$k_i = \frac{A' - A}{2H \, m_i} \qquad (7) \quad .$$

Сущность предлагаемого способа заключается в предварительном вычислении для всех полос величины коэффициентов k_i , а зная k_i можно затем определить по формуле (6) все

$$m_i - a_{i-1}$$

и по ним все

$$m_i \text{ и } a_i \quad .$$

Рассмотрим прежде всего частный случай, при котором все вычисления являются особенно простыми.

Если разница между

$$A' \text{ и } A$$

невелика, то можно принять приближенно в формуле (7) величину средней линии m_i для всех полос одинаковой и равной средней линии M всего участка, и тогда для всех полос будем иметь общий коэффициент k_i , который мы обозначим просто через k , и формула (7) примет вид

$$k = \frac{A' - A}{2\,HM} \quad ,$$

или после замены HM через площадь данного участка Q

$$k = \frac{A' - A}{2Q} \qquad (8) \quad .$$

Геометрическое значение коэффициента k в этом случае очень простое и является, как легко видеть, средней величиной половины разности между параллельными сторонами, приходящейся на единицу площади.

Все вычисления полезно вести в ведомости прилагаемой здесь формы, которая ясна сама по себе.

№№ полос	q_i	$m_i - a_{i-1}$	m_i	a_i	h_i		b_i	b_i'	Примечание
					выч.	испр.			
1	q_1	$m_1 - A$	m_1	A	h_1	h_1	b_1	b_1'	$k = \frac{A' - A}{2Q}$,
2	q_2	$m_2 - a_1$	m_2	a_1	h_2	h_2	b_2	b_2'	$b_i = h_i \frac{B}{H}$,
				a_2					$b_i' = h_i \frac{B'}{H}$.
i	q_i	$m_i - a_{i-1}$	m_i	a_{i-1}	h_i	h_i	b_i	b_i'	
				a_i					
$n-1$	q_{n-1}	$m_{n-1} - a_{n-2}$	m_{n-1}	a_{n-2}	h_{n-1}	h_{n-1}	b_{n-1}	b'_{n-1}	
n	q_n	$m_n - a_{n-1}$	m_n	a_{n-1}	h_n	h_n	b_n	b'_n	
				A'					
	Q	$\frac{A' - A}{2}$			$\sum_{i=1}^{n} h_i$	H	B	B'	

Здесь высоты h_i определяются, как и в общем случае, т. е. по формуле

$$h_i = \frac{q_i}{m_i} \quad ,$$

а боковые стороны b_i и b_i' можно рекомендовать вычислять, если работа выполняется помощью арифмометра, либо путем умножения высот h_i на отношения

$$\frac{B}{H} \text{ или } \frac{B'}{H} \quad ,$$

заменяющие

$$\frac{1}{\cos \alpha}$$

для прямоугольной трапеции и

$$\frac{1}{\cos \beta} \text{ и } \frac{1}{\cos \gamma}$$

для косоугольной трапеции,— либо, при незначительности разности между B и H или B' и H, путем простого распределения поправок подобно тому, как при увязке приращений.

Правильность вычислений $m_i - a_{i-1}$ поверяется тем, что величины эти для всех полос должны дать в сумме $\frac{A' - A}{2}$, так как

$$\sum_{i=1}^{n}(m_i - a_{i-1}) = kq_1 + kq_2 + \ldots + kq_i + \ldots + kq_n = k(q_1 + q_2 + \ldots + q_n) = \kappa Q$$

или, после подстановки значения k из формулы (8),

$$\sum_{i=1}^{n}(m_i - a_{i-1}) = \frac{A' - A}{2} \quad .$$

m_i и a_i вычисляются последовательным добавлением

$$m_i - a_{i-1} \quad \text{к} \quad a_{i-1}$$

для получения m_i и

$$m_i - a_{i-1} = a_i - m_i \quad \text{к} \quad m_i$$

для получения a_i ; поверкой служит здесь получение A' из m_n .

Ниже будет показано, что высоты h_i получаются здесь с некоторой положительной погрешностью, так что

$$\sum_{i=1}^{n} h_i > H \quad ;$$

произведя исправления этих высот так, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = H \quad ,$$

и вычислив b_i и b_i', будем иметь для поверки

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = B \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i' = B' \ .$$

В разобранном частном случае мы при вычислении k принимали

$$m_i = M \ ,$$

вследствие чего величина k бралась у нас с определенной погрешностью, приближенно, и приближенно же определялись по ней величины

$$m_i - a_{i-1} \ ,$$

а, следовательно, и самые величины

$$a_i \text{ и } m_i \ .$$

В дальнейшем будет показано, с какой точностью находятся этим способом величины

$$a_i \text{ и } m_i$$

и в соответствии с этим будут установлены пределы применения данного частного упрощенного случая, а пока перейдем к общему случаю и приступим к определению коэффициентов k_i.

Из формулы (7) мы видим, что k_i будет заключаться между

$$k_0 = \frac{A' - A}{2HA} \quad \text{и} \quad k_0' = \frac{A' - A}{2HA'} \ .$$

К первому из этих предельных значений будет приближаться k_i при $i = 1$ и при приближении площади q_1 к нулю, так как средняя линия будет при этом стремиться сделаться равной основанию; ко второму пределу k_i будет приближаться при

$$i = n$$

и q_n, стремящейся к нулю.

Задача наша заключается в установлении для k в указанных пределах n различных значений в порядке постепенного убывания.

В рассмотренном частном случае мы имели, что

$$m_i - a_{i-1}$$

пропорционально площади q_i, теперь же, в общем случае, мы установим принцип, что самое изменение коэффициента k_i будет пропорционально площади q_i.

Установим сверх того принцип, что каждое значение k_i будет приурочиваться к средней линии соответствующей трапеции под номером i, и что изменения значения k_i от средней линии до обоих оснований будут одинаковы.

Заметим между прочим, что этим последним условием вводится поправка в принцип изменения k_i пропорционально площади, ибо обе части трапеции между средней линией и основаниями по площади не одинаковы.

Установивши такие принципы, мы легко можем вычислить все коэффициенты k_i, но сделаем это сначала для случая, когда все q_i одинаковы, т. е. общая площадь Q делится на n равных частей.

Общее изменение коэффициента k будет таково:

$$k_0 - k_0' = \frac{A' - A}{2HA} - \frac{A' - A}{2HA'} = \frac{A' - A}{2H}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{A'}\right).$$

Изменение это соответствует всей площади Q, изменение же для площади q_i будет в n раз меньше, а для площади между средней линией полосы и одним из ее оснований будет в $2n$ раз меньше общего изменения коэффициента k, т. е. окажется равным

$$\frac{1}{2n}(k_0 - k_0') = \frac{A' - A}{4nH}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{A'}\right),$$

и тогда будем иметь, что для первой полосы k_1 будет таково:

$$k_1 = k_0 - \frac{1}{2n}(k_0 - k_0')\ ;$$

для 2-й полосы, средняя линия которой отделяется от линии A площадью, равной $\frac{3}{2n}$ общей площади, будем иметь:

$$k_2 = k_0 - \frac{3}{2n}(k_0 - k_0')\ ;$$

для i-й полосы, среднюю линию которой отделяет от линии A площадь, равная $\frac{2i-1}{2n}$ общей площади,

$$k_i = k_0 - \frac{2i-1}{2n}(k_0 - k_0') \quad . \ . \ . \ (9),$$

и для последней полосы, при $i = n$

$$k_n = k_0 - \frac{2n-1}{2n}(k_0 - k_0').$$

Зная k_i, мы можем вычислить все

$$m_i - a_{i-1},$$

а уверенность в правильности вычисления этих величин получим из сравнения суммы

$$\sum_{i=1}^{n}(m_i - a_{i-1})$$

с ее ожидаемой согласно теории величиной.

Найдем эту сумму, для чего, согласно формулы (6), нужно все k_i умножить на q_i и результаты сложить, после чего получим:

$$\sum_{i=1}^{n}(m_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} k_i\ q_i = \frac{Q}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i \quad . \ . \ . \ (10),$$

или, подставляя сюда вычисленное ранее значение k_i из формулы (9), получим:

$$\sum_{i=1}^{n}(m_i - a_{i-1}) = \frac{Q}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[k_0 - \frac{2i-1}{2n}(k_0 - k_0')\right] =$$

$$= \frac{Q}{n}\left[nk_0 - \frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{2n}(k_0 - k_0')\right] = \frac{Q}{n}\left[nk_0 - \frac{n}{2}(k_0 - k_0')\right] =$$

$$= Q\,\frac{k_0 + k_0'}{2} = \frac{Q(A'-A)}{4H}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A'}\right) = \frac{Q(A'^2 - A^2)}{4HAA'} \quad \ldots (11).$$

Подставляя здесь вместо $\frac{Q}{H}$ его значение, получим окончательно:

$$\sum_{i=1}^{n}(m_i - a_{i-1}) = \frac{(A'-A)(A'+A)^2}{8AA'} \quad \ldots (12).$$

По виду формулы (12) делаем тот вывод, что

$$\sum_{i=1}^{n}(m_i - a_{i-1})$$

не зависит от n, и сверх того из равенства

$$\sum_{i=1}^{n}(m_i - a_{i-1}) = \frac{Q\,(\varkappa_0 + \varkappa_0')}{2}$$

имеем, что указанная сумма может быть получена по тому же принципу, как и каждое слагаемое

$$m_i - a_{i-1} = \varkappa_i\; q_i \;,$$

если мы будем искать таковое для одной трапеции площади Q, для которой $\varkappa$ равняется полусумме предельных значений коэффициентов, а это последнее обстоятельство при равенстве всех q_i может служить поверкой правильности вычисления

$$m_i - a_{i-1} \;.$$

Но легко показать, что то же самое относится и к случаю, когда q_i неодинаковы. В самом деле, при q_i неодинаковых всегда можно найти площадь q', являющуюся общей мерой всех площадей q_i , содержащейся в Q , скажем, N раз, и тогда мы можем произвести с одной стороны суммирование

$$\sum_{j=1}^{N}(m_j - a_{j-1})$$

при одинаковых q', а с другой предварительную группировку слагаемых

$\varkappa_j\ q_j$ для каждой полосы, получить таким образом $\varkappa_i\ q_i$ и уже затем найти

$$\sum_{i=1}^{n} (m_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i\ q_i \quad ;$$

результат в обоих случаях очевидно должен быть одинаковым, и вследствие этого мы можем утверждать, что и при неодинаковых q_i формула (12) остается верной, а эта формула показывает, что

$$\sum_{i=1}^{n} (m_i - a_{i-1})$$

дает

$$\frac{(A' - A)(A' + A)^2}{8AA'} \quad , \text{ вместо } \frac{A' - A}{2} \quad ,$$

т. е. получается величина в

$$\frac{(A' + A)^2}{4AA'}$$

раз большая, и поэтому, прежде чем вычислять все m_i, и a_i, следует исправить

$$m_i - a_{i-1}$$

умножением на поправочный множитель

$$\frac{4AA'}{(A' + A)^2} \quad ,$$

и лишь затем, вычислив m_i, а если нужно, то и a_i, найти по m_i и по q_i величины h_i, исправить последние таким образом, чтобы они дали в сумме H, по величинам h_i найти умножением на

$$\frac{B}{H} \text{ и } \frac{B'}{H}$$

величины b_i и b'_i.

Вычисления можно располагать в приводимой ниже ведомости, выписав при ней в примечании нужные при вычислениях величины.

Напомним здесь, что k_1 получается из k_0 отнятием $\triangle k_1$, а k_2 из $\varkappa_1$ отнятием

$$\triangle \varkappa_1 + \triangle \varkappa_2$$

и вообще $\varkappa_i$ из $\varkappa_{i-1}$ отнятием

$$\triangle \varkappa_{i-1} + \triangle \varkappa_i \quad ,$$

что было установлено при выводе формул для $\varkappa_i$.

Заметим также, что

$$\sum_{i=1}^{n} \triangle \varkappa_i = \frac{\varkappa_0 - \varkappa_0'}{2}$$

и что m_i и a_i вычисляются параллельно и поверкой служит то, что в результате получается A', и т. д.

№№ полос	q_i	$-\Delta k_i$	k_i	$m_i - a_{i-1}$		m_i	a_i	h_i		b_i	b_i'	Примечание
				выч.	испр.			выч.	исп.			
			k_0				A					$\frac{A'-A}{2H}=\dots$
1	q_1	$-\Delta k_1$	k_1	$m_1 - A$	$m_1 - A$	m_1		h_1	h_1	b_1	b'_1	
							a_1					$k_0 = \dots$
2	q_2	$-\Delta k_2$	k_2	$m_2 - a_1$	$m_2 - a_1$	m_2		h_2	h_2	b_2	b'_2	$k'_0 = \dots$
							a_2					$\frac{\frac{A'-A}{2}}{Q\frac{k_0+k'_0}{2}}=\dots$
							a_{i-1}					
i	q_i	$-\Delta k_i$	k_i	$m_i - a_{i-1}$	$m_i - a_{i-1}$	m_i		h_i	h_i	b_i	b_i'	$\frac{B}{H}=\dots$
							a_i					$\frac{B'}{H}=\dots$
							a_{n-2}					
n_{-1}	q_{n-1}	$-\Delta k_{n-1}$	k_{n-1}	$m_{n-1}-a_{n-2}$	$m_{n-1}-a_{n-2}$	m_{n-1}		h_{n-1}	h_{n-1}	b_{n-1}	b'_{n-1}	
							a_{n-1}					
n	q_n	$-\Delta k_n$	k_n	$m_n - a_{n-1}$	$m_n - a_{n-1}$	m_{-n}		h_n	h_n	b_n	b'_n	
			k_0'				A'					
	Q	$\frac{k_0 - k_0'}{2}$		$Q\frac{k_0+k_0'}{2}$	$\frac{A'-A}{2}$			$\sum\limits_{i=1}^{n} h_i$	H	B	B'	

Перейдем теперь к установлению точности и пределов применения сначала для частного случая, а затем и для случая общего.

Пусть требуется нам разбить трапецию площади Q на n каких угодно трапеций площади

$$q_1, q_2, \dots q_i, \dots q_n;$$

мы будем вычислять при этом

$$a_i - m_{i-1}$$

по формуле

$$m_i - a_{i-1} = kq_i .$$

Вводя обозначения:

$$Q_1 = q_1,$$
$$Q_2 = q_1 + q_2,$$
$$\dots\dots$$
$$Q_i = q_1 + q_2 + \dots + q_i ,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$Q_n = q_1 + q_2 + \dots + q_i + \dots + q_n ,$$

будем иметь:

$$\begin{array}{l} m_1 - A = kq_1 \\ a - m_1 = kq_1 \\ + \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ m_i - a_{i-1} = kq_i \\ \underline{a_i - m_i = kq_i} \\ a_i - A = k(2q_1 + 2q_2 + \; . \; . \; . \; + 2q_i) = 2kQ_i \quad (13). \end{array}$$

Введем сверх того обозначение

$$Q_i = jQ \quad (14) \quad ,$$

где j удовлетворяет неравенствам:

$$o < j < 1 \quad ,$$

тогда, подставляя значение Q_i из формулы (14) в формулу (13), будем иметь:

$$a_i - A = 2kjQ \quad ,$$

или

$$a_i = A + 2kjQ \quad (15) \quad .$$

Найдем, при каком значении j точность в относительных единицах a_i будет наименьшей, или, другими словами, относительная погрешность a_i будет достигать своей границы.

Найдем для этого точное значение a_i, зная, что эта линия отделяет в данной трапеции площадь

$$Q_i = jQ \quad ,$$

считая от линии A:

$$a_i = \sqrt{A^2 + 2jQ\frac{A' - A}{H}} \quad ,$$

или по замене

$$\frac{2Q}{H} \text{ на } A' + A \quad ,$$

будем иметь:

$$a_i = \sqrt{A^2 + j(A'^2 - A^2)} \quad .$$

Из сравнения приближенного и точного значения a_i имеем $\triangle a_i$, т.е. действительную абсолютную погрешность a_i:

$$\triangle a_i = A + 2kj\mathrm{Q} - \sqrt{A^2 + j(A'^2 - A^2)} \quad ,$$

или, после замены k его значением из формулы (8),

$$\triangle a_i = A + j(A' - A) - \sqrt{A^2 + j(A'^2 - A^2)} \quad ,$$

отсюда

$$\frac{\triangle a_i}{a_i} = \frac{A + j(A' - A)}{\sqrt{A^2 + j(A'^2 - A^2)}} - 1 \quad ,$$

или, по разделении числителя и знаменателя на A и замене $\frac{A'}{A}$ через r,

$$\frac{\triangle a_i}{a_i} = \frac{1 + j(r - 1)}{\sqrt{1 + j(r^2 - 1)}} - 1 \; . \; . \; . \; (16) \quad .$$

В этой последней формуле j является независимой переменной, а $\frac{\triangle a_i}{a_i}$ ее функцией.

Найдем, при каких значениях j функция $\frac{\triangle a_i}{a_i}$ достигает своего Mx или Mn, для чего определим 1-ю и 2-ю производную этой функции по j.

$$\frac{d\left(\frac{\triangle a_i}{a_i}\right)}{dj}=\frac{d}{dj}\left[\frac{1+j(r-1)}{\sqrt{1+j(r^2-1)}}\right]=\frac{r-1}{\sqrt{1+j(r^2-1)}}-$$

$$-\frac{[1+j(r-1)](r^2-1)}{2[1+j(r^2-1)]^{3/2}}=\frac{(r-1)\left\{2+2j(r^2-1)-(r+1)[1+j(r-1)]\right\}}{2[1+j(r^2-1)]^{3/2}}=$$

$$=\frac{(r-1)[1+j(r^2-1)-r]}{2[1+j(r^2-1)]^{3/2}}=\frac{(r-1)^2[j(r+1)-1]}{2[1+j(r^2-1)]^{3/2}},$$

откуда

$$j(r+1)-1=0\ ,$$

или

$$j=\frac{1}{r+1}\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ (17)\ .$$

$$\frac{d^2\left(\frac{\triangle a_i}{a_i}\right)}{dj^2}=\frac{(r-1)^2}{2}\,\frac{d}{dj}\left\{\frac{j(r+1)-1}{[1+j(r^2-1)]^{3/2}}\right\}=$$

$$=\frac{(r-1)^2}{2}\left\{\frac{r+1}{[1+j(r^2-1)]^{3/2}}-\frac{3(r^2-1)[j(r+1)-1]}{2[1+j(r^2-1]^{5/2}}\right\};$$

и так как 2-й член в фигурных скобках в силу равенства (17) для значения Mx или Mn обращается в нуль, то имеем:

$$\frac{d^2\left(\frac{\triangle a_i}{a_i}\right)}{dj^2}=\frac{(r-1)^2(r+1)}{2[1+j(r^2-1)]^{3/2}}>0\,.$$

Таким образом относительная погрешность a_i имеет Mn при

$$j=\frac{1}{r+1}\ .$$

Принимая во внимание, что как при $j=0$, так и при $j=1$

$$\frac{\triangle a_i}{a_i}=0$$

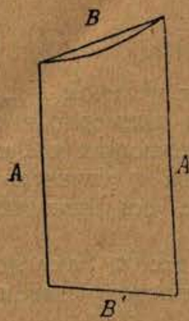
и что при

$$j=\frac{1}{r+1}$$

эта функция имеет Mn, приходим к выводу, что во всем промежутке от 0 до 1 функция $\frac{\triangle a_i}{a_i}$ имеет отрацательные значения и что по абсолютной величине она при

$$j=\frac{1}{r+1}\cdot\ \cdot\quad (17)$$

достигает Mx.



Черт. 3.

Таким образом оказывается, что наиболее грубо предлагаемым способом будет вычисляться a_i, отграничивающая площадь, равную $\frac{1}{r+1}$ обшей площади, считая от линии A.

Откладывая вычисленные по приближенным формулам значения a_i от стороны B' (см. черт. 3), мы получим, что концы a_i расположатся примерно по кривой, изображенной на этом чертеже вдоль линии B и иллюстрирующей закон изменения $\frac{\triangle a_i}{a_i}$.

Вычислим теперь границу относительной погрешности a, т.-е. e_a, равную абсолютному значению

$$\frac{\triangle a_i}{a_i} \text{ при } j = \frac{1}{r+1} ,$$

для чего подставим в формулу (16), переменивши предварительно знак перед $\frac{\triangle a_i}{a_i}$, значение j из формулы (17):

$$e_a = 1 - \sqrt{\frac{1+\frac{r-1}{r+1}}{1+\frac{r^2-1}{r+1}}} = 1 - \frac{2r}{(r+1)\sqrt{r}} = 1 - \frac{2\sqrt{r}}{r+1} .$$

Установим теперь, как изменяется e_a с изменением r, для чего найдем производную e_a по r:

$$\frac{de_a}{dr} = -2\,\frac{d}{dr}\left(\frac{\sqrt{r}}{r+1}\right) = -2\left[\frac{1}{2(r+1)\sqrt{r}} - \frac{\sqrt{r}}{(r+1)^2}\right] =$$

$$= -2\,\frac{(r+1)-2r}{2(r+1)^2\sqrt{r}} = \frac{r-1}{(r+1)^2\sqrt{r}} > 0 .$$

Так как производная e_a положительна, то с возрастанием r возрастает e_a.

Придавая теперь r в выражении для e_a различные частные значения, получим прилагаемую табличку, изображающую точность a при различных r.

r	e_a
1.01	0,00001
1,02	0,00005
1,03	0,00011
1,04	0,00019
1,05	0,00030
1,06	0,00043
1,07	0,00058
1,08	0,00074
1,09	0,00093
1,10	0,00114

Табличка эта показывает, что уже начиная со значения $r = 1{,}1$ точность a_i делается меньшей, чем до 0.001.

Если мы поставим себе условие определять a_i с точностью, например, не меньшей, чем при полевых измерениях, то в соответствии с обычными линейными размерами при проектировании полос и таблицами наибольших допустимых разностей при двойном измерении линий, нам придется принять для границы относительной погрешности a предельное значение в 0.001 и для предельной допустимой при этом способе величины r значение $1{,}09$.

Так как, далее, при небольших значениях r величина $\frac{1}{r+1}$ будет близка к половине, то мы можем считать, что наиболее грубо будут определяться a_i, а следовательно и m_i, около средины данной трапеции; а так как h_i вычисляется у нас по формуле

$$h_i = \frac{q_i}{m_i} \quad ,$$

при которой относительная погрешность m_i передается целиком h_i, то заключаем, что и h_i будет вычисляться наиболее грубо примерно посредине данной трапеции и наиболее точно в полосах, прилегающих к A и A', а при сделанных ограничениях относительно величины r точность h_i в относительных единицах (без принятия во внимание погрешности от округления h_i) будет не ниже, чем до *0,001*.

Знак погрешности h будет положителен, так как все a_i, а следовательно и m_i, ниже своей действительной величины, а поэтому имеем

$$\sum_{i=1}^{n} h_i > H \quad .$$

Увязав все h_i так, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = H$$

и приняв во внимание при этом различную точность всех значений h_i, мы получим исправленные h_i очень близкими к их действительной величине; точность же a_i практического значения у нас иметь не может.

Перейдем теперь к установлению точности вычислений и пределов применения случая общего; мы имеем:

$$\begin{array}{l} m_1 - A = k_1 q_1 \\ a_1 - m_1 = k_1 q_1 \\ + \; \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ m_i - a_{i-1} = k_i \; q_i \\ \underline{a_i - m_i = k_i \; q_i} \\ \hline a_i - A = 2 \sum\limits_{1}^{i} k_i \; q_i \quad . \end{array}$$

Здесь q_i могут быть какие угодно, но так как нами было показано, что величина

$$\sum_{1}^{i} k_i \; q_i$$

и при неодинаковых q_i будет та же, что при одинаковых, то при определении приближенной величины a_i мы будем принимать все q_i одинаковыми и равными $\frac{Q}{n}$. Тогда будем иметь

$$a_i - A = \frac{2Q}{n} \sum_{1}^{i} k_i \quad ;$$

подставляя здесь вместо k_i вычисленное ранее его значение из формулы (9), получим:

$$a_i - A = \frac{2Q}{n} \sum_{1}^{i} \left[k_0 - \frac{2i-1}{2n} (k_0 - k'_0) \right] = \frac{2Q}{n} \left[ik_0 - \frac{i^2}{2n} (k_0 - k'_0) \right] =$$

$$= \frac{Q\,(A' - A)}{nH} \left[\frac{i}{A} - \frac{i^2}{2n} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{A'} \right) \right] \quad ,$$

или заменяя здесь $\frac{Q}{H}$ через $\frac{A' + A}{2}$ и избавляясь от знаменателей, будем иметь:

$$a_i - A = \frac{(A'^2 - A^2)\, i}{4n\, A'A} \left[2A' - \frac{i}{n} (A' - A) \right] \quad ,$$

или, после умножения на поправочный множитель

$$\frac{4\,AA'}{(A' + A)^2} \quad ,$$

получим

$$a_i - A = \frac{(A^1 - A)i}{n\,(A' + A)} \left[2A' - \frac{i}{n} (A' - A) \right] \; . \; . \; . \; . \; (18).$$

Таково приближенное значение a_i ; нетрудно получить теперь и точное значение этой линии.

Действительно, так как a_i отграничивает i полос в трапеции площади Q площадью каждая в $\frac{Q}{n}$, то по формулам (*) и (**), с заменой значения

$$tg\,\alpha \text{ или } tg\,\beta + tg\,\gamma \text{ через } \frac{A' - A}{H}$$

получим

$$a_i = \sqrt{A^2 + \frac{2Qi}{n} \frac{A' - A}{H}} = \sqrt{A^2 + \frac{2Qi\,(A' - A)}{nH}} \quad ,$$

или, после замены $\frac{Q}{H}$ через $\frac{A' + A}{2}$, получим окончательно

$$a_i = \sqrt{A^2 + \frac{i}{n} (A'^2 - A^2)} \; . \; . \; . \; . \; (19).$$

По формулам (18) и (19) получаем теперь действительную относительную погрешность $\frac{\triangle a_i}{a_i}$ линии a_i :

$$\frac{\triangle a_i}{a_i} = \frac{A + \frac{(A' - A)\,i}{n\,(A' + A)} \left[2A' + \frac{i}{n} (A' - A) \right]}{\sqrt{A^2 + \frac{i}{n} (A'^2 - A^2)}} - 1 \quad ,$$

или после замены $\frac{A'}{A}$ через r и $\frac{i}{n}$ через j:

$$\frac{\triangle a_i}{a_i} = \frac{1 + \frac{(r-1)j}{r+1}\left[2r - j(r-1)\right]}{\sqrt{1 + j(r^2-1)}} - 1 \ . \ . \ . \ (20).$$

Здесь j есть

$$\frac{i}{n} = \frac{iq}{nq} = \frac{Q_i}{Q} \ .$$

Найдем, при каком значении j точность a_i в относительных единицах будет наименьшей, для каковой цели найдем Mx и Mn функции $\frac{\triangle a_i}{a_i}$.

Определим первую и вторую производную функции $\frac{\triangle a_i}{a_i}$ по j и найдем значения j, при которых первая производная обращается в нуль.

$$\frac{d\frac{\triangle a_i}{a_i}}{dj} = \frac{d}{dj}\left\{\frac{1 + \frac{(r-1)j}{r+1}\left[2r - j(r-1)\right]}{\sqrt{1 + j(r^2-1)}}\right\} =$$

$$= \frac{\frac{r-1}{r+1}\left[2r - 2j(r-1)\right]}{\sqrt{1 + j(r^2-1)}} - \frac{(r^2-1)\left\{1 + \frac{(r-1)j}{r+1}\left[2r - j(r-1)\right]\right\}}{2\left[1 + j(r^2-1)\right]^{3/2}} =$$

$$= (r-1)\frac{4\left[r - j(r-1)\right]\left[1 + j(r^2-1)\right] - (r+1)\left\{(r+1) + (r-1)j\left[2r - j(r-1)\right]\right\}}{2(r+1)\left[1 + j(r^2-1)\right]^{3/2}} =$$

$$= \frac{(r-1)\left[4r - 4j(r-1) + 4rj(r^2-1) - 4j^2(r^2-1)(r-1) - (r+1)^2 - 2rj(r^2-1) + j^2(r-1)(r^2-1)\right]}{2(r+1)\left[1 + j(r^2-1)\right]^{3/2}} =$$

$$= \frac{(r-1)\left[-3j^2(r^2-1)(r-1) + 2j(r-1)^2(r+2) - (r-1)^2\right]}{2(r+1)\left[1 + j(r^2-1)\right]^{3/2}} =$$

$$= \frac{-(r-1)^3\left[3j^2(r+1) - 2j(r+2) + 1\right]}{2(r+1)\left[1 + j(r^2-1)\right]^{3/2}} = 0,$$

откуда

$$3j^2(r+1) - 2j(r+2) + 1 = 0 \ . \ . \ . \ (21),$$

или

$$j = \frac{r + 2 \mp \sqrt{(r+2)^2 - 3(r+1)}}{3(r+1)} = \frac{r + 2 \mp \sqrt{r^2 + r + 1}}{3(r+1)}$$

$$j = \frac{r + 2 - \sqrt{r^2 + r + 1}}{3(r+1)} \ . \ . \ . \ (22)$$

$$j_2 = \frac{r + 2 + \sqrt{r^2 + r + 1}}{3(r+1)} \ . \ . \ . \ (23).$$

Найдем теперь вторую производную функции $\frac{\triangle a_{\mathrm{i}}}{a_{\mathrm{i}}}$ при значениях $\mathrm{j} = \mathrm{j}_1$ и $\mathrm{j} = \mathrm{j}_2$.

$$\frac{d^2\left(\frac{\triangle a_{\mathrm{i}}}{a_{\mathrm{i}}}\right)}{d\mathrm{j}^2} = \frac{-(r-1)^3}{2(r+1)}\left\{\frac{6\mathrm{j}(r+1)-2(r+2)}{[1+\mathrm{j}(r^2-1)]^{3/2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{3(r^2-1)[3\mathrm{j}^2(r+1)-2\mathrm{j}(r+2)+1]}{2[1+\mathrm{j}(r^2-1)]^{5/2}}\right\},$$

или в силу равенства (21) и так как

$$3\mathrm{j}(r+1)-(r+2) = \mp\sqrt{r^2+r+1},$$

имеем

$$\frac{d^2\left(\frac{\triangle a_{\mathrm{i}}}{a_{\mathrm{i}}}\right)}{d\mathrm{j}^2} = \frac{-(r-1)^3[3\mathrm{j}(r+1)-(r+2)]}{(r+1)[1+\mathrm{j}(r^2-1)]^{3/2}} = \frac{\pm(r-1)^3\sqrt{r^2+r+1}}{(r+1)[1+\mathrm{j}(r^2-1)]^{3/2}};$$

отсюда заключаем, что при $\mathrm{j} = \mathrm{j}_1$ имеем Mn и при $\mathrm{j} = \mathrm{j}_2$ Mx фукции

$$\frac{\triangle a_{\mathrm{i}}}{a_{\mathrm{i}}}.$$

Принимая же во внимание, что j лежит в промежутке от 0 до 1 и при значениях $j = 0$ и $j = 1$

$$\frac{\triangle a_{\mathrm{i}}}{a_{\mathrm{i}}} = 0,$$

приходим к выводу, что при постепенном изменении j от 0 до 1 функция $\frac{\triangle a_{\mathrm{i}}}{a_{\mathrm{i}}}$ вначале равна нулю, затем получает отрицательныя значения, достигая Mn при $\mathrm{j} = \mathrm{j}_1$, потом переходит через нуль, получая положительные значения и достигая при $\mathrm{j} = \mathrm{j}_2$ своего Mx, а при $\mathrm{j} = 1$ делается равной нулю

Другими словами, вычисленные по приближенным формулам значения a_{i} в первой части данной трапеции меньше истинных значений a_{i}, а во второй больше таковых, с наибольшим относительным отклонением в сторону уменьшения при $\mathrm{j} = \mathrm{j}_1$ и в сторону увеличения при $\mathrm{j} = \mathrm{j}_2$.

Черт. 4.

Закон изменения $\frac{\triangle a_{\mathrm{i}}}{a_{\mathrm{i}}}$ можно иллюстрировать чертежем 4, где на кривой при боковой стороне трапеции B' располагаются концы a_{i}, отложенных от B'.

Покажем теперь, что с возрастанием r функция $\frac{\triangle a_{\mathrm{i}}}{a_{\mathrm{i}}}$ будет увеличиваться по своему абсолютному значению при $\mathrm{j} = \mathrm{j}_1$ и $\mathrm{j} = \mathrm{j}_2$, для чего найдем производную этой функции по r.

$$\frac{d\left(\frac{\triangle a_{\mathrm{i}}}{a_{\mathrm{i}}}\right)}{dr} = \frac{d}{dr}\left\{\frac{1+\frac{(r-1)\mathrm{j}}{r+1}[2r-\mathrm{j}(r-1)]}{\sqrt{1+\mathrm{j}(r^2-1)}}\right\} =$$

$$=\frac{\left\{\frac{2j}{(r+1)^2}[2r-j(r-1)]+\frac{(r-1)j}{r+1}(2-j)\right\}[1+j(r^2-1)]-rj\left\{1+\frac{(r-1)j}{r+1}[2r-j(r-1)]\right\}}{[1+j(r^2-1)]^{3/2}}=$$

$$=j\frac{\left\{2[2r-j(r-1)]+(r^2-1)(2-j)\right\}[1+j(r^2-1)]-r(r+1)\left\{(r+1)+(r-1)j[2r-j(r-1)]\right.}{(r+1)^2[1+j(r^2-1)]^{3/2}};$$

Из равенства нулю функции $\frac{d\frac{\triangle a_i}{a_i}}{dj}$ имеем, что

$$(r+1)\left\{(r+1)+(r-1)j[2r-j(r-1)]\right\}=4[r-j(r-1)][1+j(r^2-1)] \;;$$

принимая это во внимание, имеем:

$$\frac{d\left(\frac{\triangle a_i}{a_i}\right)}{dr}=j\frac{2[2r-j(r-1)]+(r^2-1)(2-j)-4r[r-j(r-1)]}{(r+1)^2\sqrt{1+j(r^2-1)}}=$$

$$=j\frac{4r-2j(r-1)+2(r^2-1)-j(r^2-1)-4r^2+4rj(r-1)}{(r+1)^2\sqrt{1+j(r^2-1)}}=j\frac{3j(r-1)^2-2(r-1)^2}{(r+1)^2\sqrt{1+j(r^2-1)}}=$$

$$=j(r-1)^2\frac{3j-2}{(r+1)^2\sqrt{1+j(r^2-1)}}=\frac{j(r-1)^2[3j(r+1)-2(r+1)]}{(r+1)^3\sqrt{1+j(r^2-1)}}=$$

$$=\frac{j(r-1)^2[3j(r+1)-(r+2)-r]}{(r+1)^3\sqrt{1+j(r-1)}},$$

или, после замены выражения

$$3j(r+1)-(r+2) \text{ на } \mp\sqrt{r^2+r+1},$$

получим:

$$\frac{d\left(\frac{\triangle a_i}{a_i}\right)}{dr}=\frac{j(r-1)^2[-r\mp\sqrt{r^2+r+1}]}{(r+1)^3\sqrt{1+j(r^2-1)}},$$

и так как

$$\sqrt{r^2+r+1}>r,$$

то при $j=j_1$

$$\frac{d\left(\frac{\triangle a_i}{a_i}\right)}{dr}<0,$$

а при $j=j_2$

$$\frac{d\left(\frac{\triangle a_i}{a_i}\right)}{dr}>0,$$

из чего заключаем, что как при $j=j_1$, когда

$$\frac{\triangle a_i}{a_i}<0,$$

так и при $j = j_2$, когда

$$\frac{\Delta a_i}{a_i} > 0 \quad ,$$

функция $\frac{\Delta a_i}{a_i}$ с возрастанием r увеличивается по своему абсолютному значению.

Составим теперь табличку значений $\frac{\Delta a_i}{a_i}$ при $j = j_1$ и $j = j_2$ и различных значениях r.

r	$j = j_1$	$j = j_2$	$\frac{\Delta a_i}{a_i}\ j = j_1$	$\frac{\Delta a_i}{a_i}\ j = j_2$
1,1	0,20	0,78	—0,00003	0,00002
1,2	0,20	0,77	—0,00016	0,00014
1,3	0,19	0,77	—0,00048	0,00039
1,4	0,18	0,76	—0,00104	0,00078
1,5	0.18	0,76	—0,00185	0,00131

Из этой таблички видим, что найбольшего отрицательного значения относительная погрешность a_i достигает приблизительно на $^1/_5$ части площади заданной трапеции, а найбольшего положительного приблизительно на $^3/_4$—$^4/_5$ той же площади.

Далее, по этой табличке замечаем, что при j, равном 0,18—0,20, относительное отклонение a_i от ее истинной величины будет несколько более сильным, чем при j, равном 0,76—0,78, и что способ этот в таком виде применять при $r > 1,4$ не представляется возможным, ибо он делается уже грубым.

Но так как обычно на практике r не превышает указанного предела, то применение изложенного здесь способа может быть достаточно широким.

Отметим здесь, что для m_i действительная абсолютная погрешность равна арифметическому среднему из действительных абсолютных погрешностей a_{i-1} и a_i и что поэтому Mx и Mn для m_i будет несколько смягчен.

Относительная же погрешность m_i передается h_i при вычислении последней по формуле:

$$h_i = \frac{q_i}{m_i}$$

и поэтому в 1-ой части данной трапеции h_i будет больше своей истинной величины, с относительным отклонением не свыше $0,001$ при

$$r \leqslant 1,4 \quad ,$$

а во второй части меньше таковой, и относительное отклонение h будет несколько слабее.

$$\sum_{i=1}^{n} h_i$$

будет очень близка к H, отличаясь от нее лишь очень незначительно в сторону преувеличения, в чем сказывается несколько большее влияние Mn, чем Mx.

Вследствие разных знаков $\triangle h_i$, увязав h_i так, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = H \quad ,$$

мы не получим приближения h_i к их истинным значениям, и величины эти остаются приближенными, найденными с точностью не ниже $0{,}001$.

Представляется возможным путем дополнительных вычислительных операций, пользуясь приближенными значениями m_i и h_i найти их точные значения. Для этой цели достаточно по вычисленным величинам h_i найти, пользуясь формулами (5), $m_i - a_{i-1}$ во втором приближении, которые можно принять уже за величины точные; из сравнения прежних значений $m_i - a_{i-1}$ с новыми получим поправки для этих величин

$$\delta(m_i - a_{i-1}) \quad ,$$

а пользуясь этими поправками, найдем сначала δm_i, а потом и δh_i, по которым можно иметь точные значения h_i и a_i.

Нахождение поправок δh_i по δm_i основано на следующих соображениях при определении h_i; по формуле

$$h_i = \frac{q_i}{m_i}$$

относительная погрешность m_i и h_i будет одинакова по абсолютной величине при разных знаках, т.-е. имеем

$$\frac{\delta h_i}{h_i} = -\frac{\delta m_i}{m_i} \quad ,$$

или

$$-\frac{\delta h_i}{\delta m_i} = \frac{h_i}{m_i} \quad ,$$

таким образом, поправки δh_i и δm_i обратных знаков и по абсолютной величине пропорциональны h_i и m_i; отсюда δh_i находится очень легко, так сказать, с первого взгляда на величины δm_i, h_i и m_i.

Нахождение точных h_i может быть произведено двумя путями— параллельным для всех h_i и последовательным для каждого h_i по очереди, начиная с h_1.

Рассмотрим сначала первый способ. Пользуясь этим способом, мы найдем прежде всего все точные значения $m_i - a_{i-1}$ по формулам (5), по ним найдем все $\delta(m_i - a_{i-1})$, и так как мы приближенные значения m_i получали путем прибавления к A суммы некоторого количества значений $m_i - a_{i-1}$, то величины m_i будут заключать в себе и все погрешности просуммированных значений $m_i - a_{i-1}$, которые мы получим суммированием соответствующих $\delta(m_i - a_{i-1})$. Таким путем мы найдем подряд все δm_i, а по ним все δh_i и все точные значения h_i. Точных же значений a_i, как неимеющих для нас интереса, мы искать не будем. Дополнительные вычисления располагаются в 3-х новых столбцах:

$$1)\ \delta(m_i - a_{i-1}) \ , \qquad 2)\ \delta m_i \quad \text{и} \quad 3)\ \delta h_i$$

точные же значения h_i ставятся вместо прежних исправленных увязкой значений h_i.

Второй способ отличается от первого тем, что во избежание накопления погрешностей в m_i не производится вычислений всех m_i по приближенным данным, а находится лишь m_i, да притом по $m_i - A$, неисправленному умножением на поправочный множитель

$$\frac{4AA'}{(A'+A)^2}\ ;$$

пользуясь m_1, найдем по нем приближенное h_1 по формуле

$$h_1 = \frac{q_1}{m_1}$$

и затем $m_1 - A$ во втором приближении по формуле (5), что даст нам

$$\delta m_1 = \delta(m_1 - A),$$

по которой мы определим δh_1 и точное h_1; переходя ко 2-й трапеции, мы найдем попутно точное a_1 добавлением к A два раза по точному $m_1 - A$ и затем приближенное m_2 и т. д. пока не получим A'.

Покажем теперь, что значения m_i и h_i, получаемые обоими этими способами, можно принять за точные, для чего найдем границы их относительных погрешностей.

Для обоих способов вместе мы имеем следующие формулы:

$$\frac{\triangle h_i}{h_i} = -\frac{\triangle m_i}{m_i}$$

откуда

$$\triangle h_i = -\frac{\triangle m_i}{m_i} h_i\ ;$$

так как для $m_i - a_{i-1}$ во втором приближении имеем формулу (5)

$$m_i - a_{i-1} = h_i \frac{A'-A}{2H}\ ,$$

то обозначая действительную абсолютную погрешность m_i во втором приближении через $\triangle' m_i$, получим:

$$\triangle' m_i = \triangle(m_i - a_{i-1}) = \frac{A'-A}{2H}\triangle h_i = -\frac{A'-A}{2H}\cdot\frac{\triangle m_i}{m_i}\cdot h_i\ ,$$

а так как

$$\frac{\triangle' h_i}{h_i} = -\frac{\triangle' m_i}{m_i}\ ,$$

где $\triangle' h_i$ есть действительная погрешность h_i, найденного во втором приближении, то имеем:

$$\frac{\triangle' h_i}{h_i} = \frac{A'-A}{m_i}\cdot\frac{h_i}{2H}\cdot\frac{\triangle m_i}{m_i}\ .\ .\ .\ (24).$$

Теперь для первого случая, независимо от значения i, имеем, что

$$\frac{\triangle m_i}{m_i} \leqslant 0{,}001\ ,\quad \frac{A'-A}{m} = \frac{r-1}{\frac{m}{A}} < r-1 \leqslant 0{,}4$$

при $r \leqslant 1{,}4$;

$\frac{h_i}{2H}$ можно принять при этом способе, который для проектирования единичных участков применяться не будет, удовлетворяющим формуле

$$\frac{h_i}{2H} \leqslant {}^1/_8 \quad ;$$

отсюда получим

$$\frac{\triangle' h_i}{h_i} \leqslant 0{,}4 \, . \, {}^1/_8 \, . \, 0{,}001 = 0{,}0005 \quad ,$$

или

$$e_h = 0{,}0005 \quad .$$

Хотя при нашем выводе не приняты во внимание погрешности от округления, но все же с такой незначительной величиной e_h можно принять практически полученные во 2-м приближении значения h_i за точные.

Перейдем теперь ко 2-му способу и представим себе, что мы вычисляем элементы $i^{\text{-й}}$ полосы.

При нахождении этих элементов мы будем принимать найденную ранее a_{i-1} за точную величину и погрешность m_i будет вытекать лишь из приближенности найденного значения $m_i - a_{i-1}$. Определим прежде всего действительную относительную погрешность m_i, найденной в первом приближении.

Пусть у нас площадь от линии A до средней линии проектируемой полосы m_i будет

$$Q_i = jQ \quad .$$

Тогда точное значение m_i определится по формуле

$$m_i = \sqrt{A^2 + 2Qj \frac{A' - A}{H}} = \sqrt{A^2 + j(A'^2 - A^2)} \quad ,$$

что же касается $\triangle m_i$, то для определения ея примем такой порядок: найдем ту площадь, исходя из которой вычисляется коэффициент k_i для $i^{\text{-й}}$ полосы, найдем затем величину этого коэффициента и, наконец, приближенное значение $m_i - a_{i-1}$ по формуле

$$m_i - a_{i-1} = k_i \; q_i$$

и точное значение той же величины по формуле

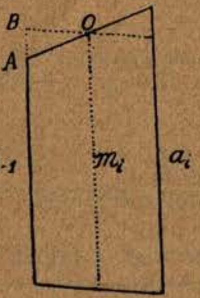
$$m_i - a_{i-1} = \frac{h_i \, (A' - A)}{2H} \quad ,$$

откуда

$$\triangle m_i = k_i \; q_i - \frac{h_i \, (A' - A)}{2H} \quad . \; . \; . \; (25).$$

При принятом у нас принципе исчисления коэффициентов k_i должна при этом приниматься площадь не до средней линии m_i, а до a_{i-1} плюс $\frac{q_i}{2}$, а эта площадь Q'_i больше площади Q_i на величину треугольника OAB (см. черт 5), у которого основание

$m_i - a_{i-1}$, высота $\frac{h_i}{2}$ и площадь $\frac{h_i \, (m_i - a_{i-1})}{4} = \frac{h_i^2 (A' - A)}{8H}$,



Черт. 5.

и, таким образом, имеем:

$$Q'_i = jQ + \frac{h_i^2 (A' - A)}{8H},$$

тогда k_i по принятому у нас принципу определится формулой

$$k_i = k_0 - \frac{Q'_i}{Q}(k_0 - k'_0) = k_0 - \left[j + \frac{h_i^2 (A' - A)}{8HQ}\right](k_0 - k'_0) =$$

$$= \frac{A' - A}{2H}\left\{\frac{1}{A} - \left[j + \frac{h_i^2 (A' - A)}{8QH}\right]\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{A'}\right)\right\} =$$

$$= \frac{A' - A}{2HAA'}\left\{A' - \left[j + \frac{h_i^2 (A' - A)}{4H^2 (A' + A)}\right](A' - A)\right\} =$$

$$= \frac{A' - A}{2HAA'}\left\{A' - j(A' - A - \frac{(A' - A)^2}{A' + A}\left(\frac{h_i}{2H}\right)^2\right\},$$

а согласно формулы (25)

$$\triangle m_i = \frac{(A' - A) q_i}{2HAA'}\left\{A' - j(A' - A) - \frac{(A' - A)^2}{A' + A}\left(\frac{h_i}{2H}\right)^2\right\} - \frac{h_i (A' - A)}{2H} =$$

$$= \frac{(A' - A) m_i}{AA'} \cdot \frac{h_i}{2H}\left\{A' - j(A' - A) - \frac{(A' - A)^2}{A' + A}\left(\frac{h_i}{2H}\right)^2\right\} - (A' - A)\frac{h_i}{2H},$$

отсюда получаем

$$\frac{\triangle m_i}{m_i} = \frac{A' - A}{AA'} \cdot \frac{h_i}{2H}\left\{A' - j(A' - A) - \frac{(A' - A)^2}{A' + A}\left(\frac{h_i}{2H}\right)^2\right\} - \frac{(A' - A)\frac{h_i}{2H}}{\sqrt{A^2 + j(A'^2 - A^2)}},$$

где вместо m_i взято его точное значение.

Принимая теперь прежние обозначения

$$\frac{h_i}{2H} = \rho \text{ и } \frac{A'}{A} = r$$

имеем

$$\frac{\triangle m_i}{m_i} = \frac{r - 1}{r}\rho\left\{r - (r - 1)j - \frac{(r - 1)^2}{r + 1}\rho^2\right\} - \frac{(r - 1)\rho}{\sqrt{1 + j(r^4 - 1)}} =$$

$$= \frac{(r - 1)\rho}{r}\left\{r - j(r - 1) - \frac{(r - 1)^2 \rho^2}{r + 1} - \frac{r}{\sqrt{1 + j(r^2 - 1)}}\right\}.$$

Подставляя это значение в формулу (24) и заменяя m_i ее точным значением, получаем

$$\frac{\triangle' h_i}{h_i} = \frac{A' - A}{\sqrt{A^2 + j(A'^2 - A^2)}} \cdot \frac{h_i}{2H} \cdot \frac{\triangle m_i}{m_i} = \frac{(r - 1)\rho}{\sqrt{1 + j(r^2 - 1)}} \cdot \frac{\triangle m_i}{m_i} =$$

$$= \frac{(r - 1)^2 \rho^2}{r\sqrt{1 + j(r^2 - 1)}}\left\{r - j(r - 1) - \frac{(r - 1)^2 \rho^2}{r + 1} - \frac{r}{\sqrt{1 + j(r^2 - 1)}}\right\}.$$

Так как член

$$\frac{(r-1)^2\rho^2}{r+1}$$

очень мал по сравнению с другими членами в скобках, то $\frac{\Delta' h_i}{h_i}$ приблизительно пропорционально ρ^2.

Найдем теперь, при каком значении j функция $\frac{\Delta' h_i}{h_i}$ имеет Mx или Mn, для чего найдем ее первую производную по j.

$$\frac{d\left(\frac{\Delta h_i}{h_i}\right)}{dj}=\frac{(r-1)^2\rho^2}{r}\,\frac{d}{dj}\left\{\frac{r-j(r-1)-\frac{(r-1)^2\rho^2}{r+1}}{\sqrt{1+j(r^2-1)}}-\frac{r}{1+j(r^2-1)}\right\}=$$

$$=\frac{(r-1)^2\rho^2}{r}\left\{-\frac{r-1}{\sqrt{1+j(r^2-1)}}-\frac{(r^2-1)\left[r-j(r-1)-\frac{(r-1)^2\rho^2}{r+1}\right]}{2[1+j(r^2-1)]^{3/2}}+\frac{r(r^2-1)}{[1+j(r^2-1)]^2}\right\}=$$

$$=-\frac{(r-1)^3\rho^2}{2r[1+j(r^2-1)]^{3/2}}\left\{[r(r+1)-j(r^2-1)-(r-1)^2\rho^2+2+2j(r^2-1)]-\frac{2r(r+1)}{\sqrt{1+j(r^2-1)}}\right\}=$$

$$=-\frac{(r-1)^3\rho^2}{2r[1+j(r^2-1)]^{3/2}}\left\{[1+j(r^2-1)]+[1+r(r+1)-(r-1)^2\rho^2]-\frac{2r(r+1)}{\sqrt{1+j(r^2-1)}}\right\}=0$$

Вводя обозначения:

$\sqrt{1+j(r^2-1)}=x$, $1+r(r+1)-(r-1)^2\rho^2=p$ и $-2r(r+1)=q$,

имеем

$$x^2+p+\frac{q}{x}=0$$

или

$$x^3+px+q=0$$

Так как в нашем кубичном уравнении $p>0$, ибо при принимаемых у нас значениях r

$$(r-1)^2\rho^2<1\quad,$$

то наше уравнение имеет 2 мнимых и один вещественный корень, выражаемый радикалами

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^2}{27}}}\ .$$

Мнимые корни интересовать нас не могут, а определив вещественный корень данного уравнения, мы получим j из уравнения

$$1+j(r^2-1)=x^2\quad,$$

откуда

$$j = \frac{x^2 - 1}{r^2 - 1} \quad .$$

Частные значения j, соответствующие различной величине r и значению $\rho = 0{,}1$, что дает

$$h_i = {}^1/_5\, H \quad ,$$

помещены в прилагаемой ниже табличке.

Возникает теперь вопрос, Mx или Mn функции $\frac{\Delta' h_i}{h_i}$ имеем мы при указанных значениях j.

r	j	e_h
1,1	0,47	0,000001
1,2	0,44	0,000005
1,3	0,41	0,000019
1,4	0,39	0,000048
1,5	0,37	0,000101
1,6	0,35	0,000182
1,7	0,33	0,00033

Для решения этого вопроса мы найдем при каком-либо частном значении r, например $r = 1{,}5$, значение функции $\frac{\Delta' h_i}{h_i}$ и сравним его с каким-либо соседним значением этой функции.

Так как

при $r = 1{,}5$, $j = 0{,}37$, $\rho = 0{,}1$ имеем $\frac{\Delta' h_i}{h_i} =$

$$= e_h = 0{,}0001 \quad ,$$

а при $r = 1{,}5$, $j = 0$, $\rho = 0{,}1$ получаем $\frac{\Delta' h_i}{h_i} =$

$$= -\frac{(r-1)^2 \rho^4}{r(r+1)} = -0{,}000007$$

и при $r = 1{,}5$, $j = 1$, $\rho = 0{,}1$ соответств. $\frac{\Delta h_i}{h_i} = -\frac{(r-1)^2 \rho^4}{r^2(r+1)} = -0{,}000005$,

т.-е. другими словами при $j = 0{,}37$ $\quad e_h = 0{,}0001$,

а при $j = 0$ и $j = 1$

$\frac{\Delta' h_i}{h_i}$ имеет очень малую отрицательную величину, то из этого заключаем, что при значениях j, обращающих в нуль первую производную, мы имеем Mx функции $\frac{\Delta' h_i}{h_i}$, т.-е. e_h .

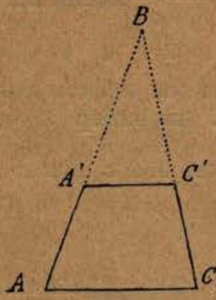
Значение e_h для различных r показано в прилагаемой табличке, из которой усматриваем, что при $\rho = 0{,}1$ для всех значений r, не превосходящих 1,5 , e_h (не принимая во внимание погрешности от округлений) не превосходит 0,0001, а эта величина является достаточно малой для того, чтобы практически считать h точной величиной.

Пределы применения второго способа можно считать поэтому не ниже, чем способа первого. На этом и заканчиваем способ проектирования полос по приближенным формулам.

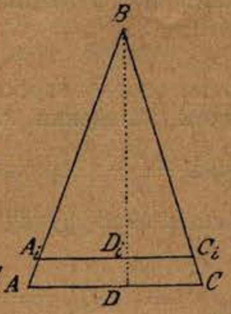
Остановимся здесь еще на способе проектирования полос, который обладает по отношению к величине $r = \frac{A'}{A}$ обратными свойствами, т.-е., способ этот применим при всяком r, за исключением случаев, когда эта величина близка к 1, и он поэтому вместе с изложенным способом друг друга дополняют.

Это способ дополнения до треугольника.

В своем курсе „Землеустроительное проектирование“ (Москва, Госиздат, 1925 г) при проектировании единичных участков (хуторов, отрубов и проч.) применять способ этот я не рекомендовал, так как затрата времени на вычисление данных дополняющего треугольника не является в этом случае рациональной.



Черт. 6-а.



Черт. 6-б

Если же предстоит разбить трапецию на несколько полос, то выводы получатся обратные, так как та же затрата времени дает возможность произвести проектирование более легким способом (по принципу деления треугольника, а не трапеции) уже нескольких участков, в данном случае полос.

Если нам нужно треугольник ABC площади $Q'+Q$, где Q площадь трапеции, а Q' площадь дополняющего треугольника, разбить линиями, параллельными AC, на n частей с площадью, считая от вершины, $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots\ldots Q_n = Q'+Q$, то для всякой Q_i мы имеем равенства:

$$\frac{Q_i}{Q'+Q}=\frac{A_iC_i^2}{AC^2}=\frac{BA_i^2}{BA^2}=\frac{BC_i^2}{BC^2}=\frac{BD_i^2}{BD^2},$$

в которых неизвестными оказываются A_iC_i, BA_i, BC_i и BD_i. Величины эти можно определить из этих равенств по формулам:

$$A_iC_i=\frac{AC}{\sqrt{Q'+Q}}\cdot\sqrt{Q_i}=n_1\sqrt{Q_i},\ldots (26).$$

$$BA_i=\frac{BA}{\sqrt{Q'+Q}}\sqrt{Q_i}=n_2\sqrt{Q_i},\ldots (27).$$

$$BC_i=\frac{BC}{\sqrt{Q'+Q}}\cdot\sqrt{Q_i}=n_3\sqrt{Q_i},\ldots (28).$$

$$BD_i=\frac{BD}{\sqrt{Q'+Q}}\cdot\sqrt{Q_i}=n_4\sqrt{Q_i}\ \ldots (29),$$

где n_1, n_2, n_3 и n_4 не зависят от i, т. е., годятся для всех полос.

Следует заметить, что отнюдь не нужно вычислять все величины A_iC_i, BQ_i, BC_i и BD_i по приведенным формулам, а достаточно найти лишь одну из них, и тогда остальные элементы полосы, могуть быть вычислены более простым способом.

Возникает поэтому вопрос, какую же именно из этих величин нужно вычислять по приведенным формулам.

При решении этого вопроса следует принять прежде всего во внимание, какие из величин заданной для разбивки трапеции можно считать точными и какие являются приближенными.

Параллельные стороны трапеции AC и $A'C'$ явились в результате вычислительных операций, согласованных с координатными данными, и эти линии можно принимать за точные (параллельные линии в заснятых на местности ходах могут быть лишь как крайне редкие исключения). Высота трапеции H была исправлена при вычислении элементов трапеции, и ее также можно принять за точную величину; что же касается линий AA' и CC', то обычно обе они, или по крайне мере одна из них, берется по данным измерений в натуре и неисправленною от увязки полигона. Эти стороны являются поэтому приближенными.

Целесообразнее и точнее положить в основу вычислений данные точные, и поэтому мы формулы (27) и (28) отбросим, а из двух других формул примем в основу пока формулу (26) и разберем подробно все последующие операции.

Перепишем прежде всего эту формулу, по соображениям, которые обнаружатся в дальнейшем, следующим образом

$$A_i\,C_i = \frac{AC}{\sqrt{2Q' + 2Q}}\sqrt{2Q_i} = n\sqrt{2Q_i} \quad .$$

Составим ведомость, помещенную ниже, для чего прежде всего возьмем все заданные для проектирования площади q_i, где счет i идет от основания $C'A'$, и удвоим их; потом суммированием определим все $2Q_i$, где

$$2Q_i = 2q_1 + 2q_2 + 2q_3 + \;.\;\;.\;\;.\; 2q_i\,.$$

Найдя величину коэффициэнта $n = \dfrac{AC}{\sqrt{2Q' + 2Q}}$, определим все $A_i\,C_i = a_i$ по указанной формуле

$$a_i = n\sqrt{2O_i}$$

и запишем вместе с ними заданные величины

$$A'C' = A = a_0 \text{ и } AC = A' = a_n\,.$$

Определив затем удвоенные средние линии $2m_i$ и, имея для проверки, что

$$\sum_{i=1}^{i=n} 2m_i = 2\sum_{i=1}^{i=n} a_i - (A + A'),$$

найдем все h_i по формуле

$$h_i = \frac{2q_i}{2m_i} \quad .$$

Для проверки имеем

$$\sum_{i=1}^{i=n} h_i = H.$$

Вот здесь уже обнаруживается, что мы брали $2Q_i$ вместо Q_i для того, чтоб можно было ограничиться нахождением $2m_i$ вместо m_i и избавиться от деления $a_{i-1} + a_i$ на 2.

N	$2q_i$	$2Q_i$	$\sqrt{2O_i}$	$a_i = n\sqrt{2Q_i}$	$2m_i = a_{i-1}+a_i$	$h_i = \frac{2q_i}{2m_i}$	$b_i = h_i\frac{B}{H}$	$b'_i = h_i \cdot \frac{B'}{H}$	Примечания
		$2Q'$	$\sqrt{2Q'}$	a_0					
1	$2q_1$				a_0+a_1	h_1	b_1	b'_1	
		$2Q_1$	$\sqrt{2Q_1}$	a_1					
2	$2q_2$				a_1+a_2	h_2	b_2	b'_2	
		$2Q_2$	$\sqrt{2Q_2}$	a_2					
. .	. . .								
		. . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . .	. . .	. . .	
. .	. . .								
		$2Q_{i-1}$	$\sqrt{2Q_{i-1}}$	a_{i-1}					
i	$2q_i$				$a_{i-1}+a_i$	h_i	b_i	b'_i	
		$2Q_i$	$\sqrt{2Q_i}$	a_i					
. .	. . .								
		. . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . .	. . .	. . .	
. .	. . .								
		$2Q_{n-2}$	$\sqrt{2Q_{n-2}}$	a_{n-2}					
n-1	$2q_{n-1}$				$a_{n-2}+a_{n-1}$	h_{n-1}	b_{n-1}	b'_{n-1}	
		$2Q_{n-1}$	$\sqrt{2Q_{n-1}}$	a_{n-1}					
n	$2q_n$				$a_{n-1}+a_n$	h_n	b_n	b'_n	
		$2Q'+2Q$	$\sqrt{2Q'+2Q}$	a_n					
	2Q			$\sum_{i=0}^{n} a_i$	$2\sum_{i=1}^{n} a_i - (a_0+a_n)$	H	B	B'	

Боковые стороны b_i **и** b'_i **определяются из формул:**

$$b_i = h_i \cdot \frac{B}{H}$$

$$b'_i = h_i \cdot \frac{B'}{H} ,$$

где B и B' суть боковые стороны заданной трапеции; поверкой служат здесь формулы:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = B ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} b'_i = B' .$$

Теперь представим себе, что какое либо основание проектируемой полосы, например a_i, вычислено неверно и пусть

$$\triangle a_i > 0.$$

Такая ошибка могла получиться либо от неверного вычисления $\sqrt{2Q_i}$, либо от неверного выполнения умножения

$$n\sqrt{2Q_i} \quad ;$$

тогда и $2m_i$ и $2m_{i+1}$, заключая в себе неверное слагаемое a_i, будут ошибочны и больше точных своих значений, а вследствие этого h_i и h_{i+1} окажутся меньшими, чем их истинные значения, и таким образом

$$\sum_{i=1}^{n} h_i$$

будет меньше H, и это покажет нам на неправильность вычислений.

Из треугольника, дополняющего нашу трапецию до нового треугольника, требуется нам при этом способе вычислений лишь площадь Q', которую можно получить из подобия треугольников следующим образом:

$$\frac{Q'}{Q'+Q} = \frac{A^2}{A'^2} ,$$

откуда

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{A^2}{A'^2 - A^2}$$

или

$$Q' = \frac{A^2 Q}{A'^2 - A^2} = \frac{A^2 Q}{(A'+A)(A'-A)} = \frac{A^2 H}{2(A'-A)} ,$$

где H есть высота заданной трапеции, и половина ее получается от деления площади трапеции Q на удвоенную среднюю линию $A' + A$.

Рассмотрим теперь тот случай, когда мы воспользуемся формулой (29), как основной для вычисления элементов проектируемых полос.

В той ведомости, которая будет соответствовать этому случаю и которую мы здесь за ее практической бесполезностью не помещаем, первые 3 столбца будут в точности соответствовать предыдущей ведомости, с той лишь разницей, что здесь будут взяты не удвоенные Q_i ; 4-й столбец даст нам H_i, а пятый

$$h_i = H_i - H_{i-1} ,$$

что соответствует в предыдущей ведомости

$$2m_i = a_{i-1} + a_i \ ;$$

но в дальнейшем между этими ведомостями обнаруживается резкая разница, ибо тогда как по 2-ой ведомости можно уже сразу вычислять b_i и b'_i, по первой нужно еще находить h_i, и вследствие этого может получиться впечатление, что 2-ая ведомость удобнее 1-ой.

Но на самом деле это совсем не так, ибо 2-ая ведомость не дает поверок и ошибка в H_i остается в дальнейшем незамеченной, отразившись на h_i и h_{i+1}.

Чтоб иметь здесь поверку, нужно найти все m_i и убедиться в правильности формулы

$$q_i = h_i \ m_i \ .$$

Нахождение же m_i можно произвести путем предварительного определения $m_i - a_{i-1}$ по формуле

$$m_i - a_{i-1} = h_i \frac{A' - A}{2H} \ ,$$

и последующего суммирования этих величин между собою и с A.

Сопоставив теперь проектирование полос по формулам (26) и (29), видим, что первый способ является значительно менее громоздким, и его можно рекомендовать предпочтительнее перед последним. Удобнее он и потому, что h_i при значительной величине H_i получаются менее точными, если не добавить в коэффициенте n лишний знак.

При близкой к 1 величине отношения $\frac{A'}{A}$ дополнение трапеции до треугольника окажется очень большим по площади и потому все Q_i окажутся еще большими числами, и извлечение из них корней будет громоздким.

Таким образом оказывается, что в смысле пределов применения оба упомянутые способа обладают обратными свойствами и в практическом отношении дополняют друг друга.

Относительно проектирования полос дополнением до треугольника имеется сообщение Л. Синельникова в № 10 „Землеустроителя“ за 1925 г., в котором с достаточной полнотой отмечен принцип выгодности использования коэффициентов n для вычисления всех H_i или боковых сторон по формулам (27) и (28), но в указанном сообщении намеченная схема не дает поверки результата, без чего применение ее рекомендовать не представляется возможным.

Далее, в части своих вариантов Л. Синельников рекомендует пользоваться логарифмами, с чем нельзя согласиться вледствие громоздкости этого метода, а в части вариантов рекомендует строить вычисления на тригонометрических функциях углов, что также нельзя рекомендовать, так как этот способ требует предварительного перечисления углов по увязанным данным, что создает лишнюю операцию. Далее, Л. Синельников не приводит варианта (26) вовсе, а он является особенно удобным.

Всеми изложенными соображениями вызвана необходимость частью дополнить, частью корректировать способы, предложенные Л. Синельниковым, что и ставит себе целью 2-ая часть настоящей статьи.

Следует отметить, что как способ проектирования полос по приближенным формулам, так и способ дополнения до треугольника выгодно применять лишь в том случае, если заданный участок делится на более или или менее значительное число полос, так как только в этом случае становится выгодным произвести сравнительно сложную предварительную подготовку участка.

В том же случае, когда нужно спроектировать лишь 3—4 полосы, можно рекомендовать проектирование по формулам (*) и (**), которые после замены в них

$$tq\,\alpha \text{ и } tq\,\beta + tq\,\gamma \text{ на } \frac{A' - A}{H}$$

дадут общую формулу

$$a' = \sqrt{a^2 + 2Q\frac{A' - A}{H}}\,,$$

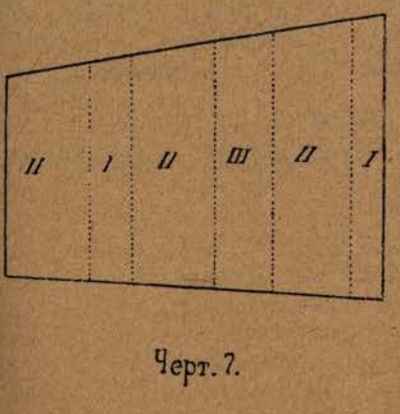
но тогда как для случая проектирования единичных участков формы косоугольной трапеции мною в моем курсе „Землеустроительное Проектирование“ рекомендуется по найденной высоте определить b и b' и по ним найти катеты, составляющие в алгебраической сумме $a' - a$, — в данном случае можно рекомендовать тотчас же по определении h найти $a' - a$ по формуле

$$a' - a = h\,(tq\,\beta + tq\,\gamma) = h\frac{A' - A}{H}$$

и тем поверить правильность проектирования полосы, отрезки же b_i и b'_i можно найти одновременно для всех полос умножением h_i на $\frac{B}{H}$ и $\frac{B'}{H}$, а это создает значительное упрощение в вычислительных операциях.

Скажем еще несколько слов о проектировании полос формы трапеции по данным оценки.

В курсе моем „Землеустроительное проектирование“ достаточно подробно развито то соображение, что проектирование по оценочным данным аналитическим способом удобно производить лишь в том случае, если оценочная работа будет согласована с работой по проектированию. С особенным успехом это соображение можно применить к проектированию полос по данным оценки.



Черт. 7.

Пусть требуется нам разбить трапецию $ABCD$ на полосы линиями, параллельными линиям AB и CD.

Производим оценку этого участка, независимо от предыдущей оценочной работы также линиями, параллельными линиям AB и CD и пусть пунктирные линии черт. 7 представляют собой оценочные линии, а римские цифры обозначают оценочные категории.

Здесь полосы, обозначенные одинаковыми категориями, могут и не представлять собою однородных по качеству площадей, но поскольку известно, что одни и те же землепользователи получат землю насквозь от линии AD до BC, то ценить эти полосы можно таким образом, чтобы категория характеризовала

среднюю ценность этой полосы, и последнее обстоятельство неудобств при оценке не создаст.

Далее, для удобства расчетов основной категорией для данного участка можно избрать совсем не ту категорию, которая была основной при общей оценке земли дачи, а ту, которая является наиболее распространенной в данном участке, т.-е., для приведенного примера—II категорию. Переведя всю площадь в основную категорию, установим право на землепользование всех граждан, получающих землю в данном участке, произведем затем расчет, сколько какой категории получит каждый землепользователь и спроектируем полученные общие для каждого землепользователя площади.

Таким путем проектирование полос по оценке требует лишь незначителвной дополнительной вычислительной работы и может быть с успехом применено повсеместно взамен босконечных согласительных пререканий с гражданами.

Заканчивая настоящую статью, должен указать, что в практических испытаниях указанных способов принимали участие мои ученики — ассистент кафедры М. Л. Лейвиков и научный сотрудник по исследовательской части Г. Н. Чернявский, а натолкнул меня на мысль взяться за разработку способа проектирования по приближенным формулам студент 4-го курса Землеустроительного факультета Академии Л. Ш. Чернухин, за что приношу здесь им мою искреннюю благодарность.

Проф. В. Киркор.

1 Июня 1926 года
г. Горки.

Das Projektieren von Streifen, welche Trapezform besitzen, vermittelst der analytischen Metode.

Bei Anwendung eines Aritmometers lassen sich zwecks Auseinanderlegung von Flächen, welche Trapezform besitzen, in Streifen—einige besondere, in Folgendem zum Vorschlag kommende Metoden anwenden.

1. Die erste von diesen Metoden besteht in einer vorhergehenden Berechnung des Unterschiedes zwischen den paralellen Seiten eines jeden Streifens nach dem Princip einer Anordnund dieser Unterschiede proportional den Flächen der Streifen nach der Formel:

$$\frac{a' - a}{2} = kq_i \,,$$

in welcher a' und a die paralellen Seiten der Streifen, di die Fläche des betreffenden Streifens,k jedoch den für alle Flächen gemeinsamen Koëfficienten, der Gleich ist $\frac{A' - A}{2Q}$, darstellen.

2. Die zweite Metode unterscheidet sich von der ersten dadurch, dass die Grösse des Koëfficienten k nicht für alle Flächen ein und dieselbe ist, sich vielmehr proportional den Flächen der Streifen ändert. Diese Metode lässt sich anwenden, wenn das Verhältniss zwischen den paralellen Seiten der Fläche in den Grenzen zwischen 1 und 1,4 schwankt.

3. Die dritte Metode besteht in einer Vervollkommnerung der in der russischen Literatur bereits bekannten Metode einer Ergänzung bis zur Form einer Dreieck's (Der Landeinrichtler (Semleustroitels) 1925 № 10), welche in einer vorhergehenden Berechnung der Grundlinien der Streifen und der Verwendung des Princips der Probeberechnung besteht. Diese Metode ergänzt die erste Metode und ist in dem Fall anwendbar, wenn die Anwendung der ersteren unbeqvem erscheint, und umgekehrt.

4. Dis vierte Metode stellt an sich eine unmittelbare Abänderung für den gegebenen Fall der von mir in meinem Hanbduch „Projektiren beim Feldmessen“ Moskau 1925 vorgeschlagenen Metode der Projektirung einzelner Landparzellen mit Hülfe der Berechnung einer zweiten Grundlinie nach der Formel dar.

Diese Abänderung besteht in der Anwendung der Proberechnung ohne vorhergehende Berechnung der Seitenlinien des Trapezes.

Prof. W. Kirkor.

О формулах линейных невязок в угломерных полигонах.

При последующих выводах мне придется ссылатся на следующие источники:

№ 1. „О погрешностях и невязках в теодолитных полигонах“ проф. Ф. Красовский; Москва 1915 г.

№ 2. „Полигонометрическая сеть“ проф. Н. Н. Веселовский; посмертное издание под редакцией проф. А. С. Чеботарева; Москва 1923 г.

№ 3. „Оценка точности результатов измерений в угломерных полигонах“ проф. А. С. Чеботарев; Москва, журнал „Геодезист“ № 3; сентябрь 1925 г.

№ 4. „Увязывание полигонов“ А. С. Чеботарев; журнал „Труды Топографо-Геодезической Комиссии“ выпуск XXI; Москва 1907 г.

№ 5. „Приемы обработки результатов непосредственных измерений в сомкнутых теодолитных ходах“ Н. Н. Веселовский; Москва 1912 г.

№ 6. „Курс Низшей Геодезии“ проф. С. М. Соловьев; 3-е издан. Москва 1914 г.

№ 7. „Влияние размеров и формы теодолитного полигона на величину невязки в периметре“ проф. П. И. Шилов; журн. „Геодезист“ № 5-6; Москва, март 1926 г.

При ссылках условимся указывать приведенный выше номер источника.

§ 1.. Известно, что в русской землемерной практике[1]) до сих пор держится обычай определять допустимость полученной линейной невязки

$$\rho = \sqrt{(\Sigma \Delta x)^2 + (\Sigma \Delta y)^2}$$

беря ее отношение к периметру P данного полигона. Не приходится доказывать произвольность этого способа. Иногда о допустимости невязки судят по „таблицам допускаемых разностей двойного измерения линий“. Этот прием тоже нельзя рекомендовать, т. к. приведенные таблицы учитывают лишь погрешности линейных измерений и совершенно не считаются с числом углов полигона и точностью угловых измерений. Для величины же допустимой линейной невязки замкнутого полигона преобладающее значение имеет как раз член, выражающий влияние ошибок измерения углов.[2]) Поэтому понятно стремление геодезистов дать обоснованную формулу допустимой линейной невязки полигона. Особенно осложняется вопрос для случая свободного замкнутого полигона произвольной формы.

Обработку полевых данных полигонного хода можно вести двояким путем: 1) не увязывая углов вычислить азимуты, приращения и действительную линейную невязку ρ; 2) сначала увязать углы и уже затем вычислять азимуты, приращения и невязку ρ. Сообразно этим двум путям

---

[1]) Имеются ввиду, главным образом, землемерные работы при землеустройстве.

[2]) См. № 1 стр. 11-я.

выводится и два вида формул допустимых линейных невязок. Ввиду сложности вопроса во втором случае обычно допускают упрощающее дело предположение, а именно, **полагают невязку разложенной на все углы поровну.** По существу, при измерениях равноточных, это предположение вполне естественно. Если обозначить допустимую линейную невязку (среднюю квадрат. ошибку) через M, то, при условии независимости линейных и угловых измерений между собой, можно написать $M^2 = M_l^2 + M_A^2$, где M_l^2 и M_A^2 суть квадраты членов, выражающих влияние на невязку M ошибок линейных (M_l) и угловых (M_A) измерений. Очевидно, первый член (M_l^2) будет одинаков при обоих упомянутых способах обработки полевого материала. Вообще этот член лучше изучен и его можно принять тождественным во всех формулах допустимых невязок, предлагаемых разными учеными. Величина M_l^2 зависит от систематических и случайных погрешностей линейных измерений и полный вид этого члена будет:

$$M_l^2 = f^2 P^2 + \mu_1^2 [l]_1 + \mu_2^2 [l]_2 + \mu_3^2 [l]_3 \quad .$$

Здесь f — коэффициент систематических ошибок, а μ_1, μ_2, μ_3 — коэффициенты случайных ошибок для 1-го, 2-го и 3-го классов местности.

Если местность не различать по классам, то три последние члена написанной формулы сольются в один член $\mu^2 P$, т. к. через l обозначены меры сторон полигона.

В замкнутых полигонах следует считать, что влияние систематических ошибок частично взаимно погашается [1]).

Если в этом последнем случае квадрат влияния систематических ошибок линейных измерений на невязку обозначать через δ^2, то следует положить $\delta^2 < f^2 P^2$.

Иногда для замкнутых полигонов этот член совсем отбрасывают. Обращаясь теперь к члену M_A^2 укажем, что формулы, даваемыя для него различными авторами, значительно разнятся между собой, иногда лишь по внешнему виду, а иногда по существу. Особенно трудным становится вопрос определения M_A^2 для второго из упомянутых выше способов обработки полевого материала.

Но зато этот второй способ и есть характерный для приемов, принятых в нашем Союзе.

В последующем я все внимание буду посвящать именно этому члену M_A^2 и попытаюсь выразить его в наиболее простой функции результатов полевых измерений.

Первый же член M_l^2, в согласии с выводами других специалистов, я приму в виде $M_l^2 = \delta^2 + \mu^2 P$.

Нужно отметить, что предвычисляя невязку мы не в состоянии определить ее направление и говорим лишь о некотором среднем линейном ея значении.

Другими словами, величину M приходится определять, как среднюю квадратическую ошибку выражений

$$\Sigma \Delta x \text{ и } \Sigma \Delta y$$

Предпринятую работу я считаю не лишней по следующим мотивам: признавая всю неправильность упомянутых выше способов определения

---

[1]) См. № 1.

допустимой невязки и считая приводимые ниже формулы проф. Ф. Н. Красовского и проф. М. Г. Михайлова достаточно строгими, я все же полагаю, что эти формулы остановят рядового землеустроителя своею относительной сложностью [1]) и тем самым толкнут его на привычный неправильный путь.

§ 2... Условимся в следующих обозначениях: α — азимуты сторон полигона; l — меры их; D_{i-r} — диагонали между вершинами i и r; β_{i-r} — азимуты этих диагоналей; n — число вершин полигона; A_i — его внутренние углы; P - его периметр; m_A — ср. кв. ошибка измерения отдельного угла; L_{o-i} — расстояние от центра тяжести O вершин полигона

$$\left(x_o = \frac{\Sigma xi}{h} \; ; \; y_o = \frac{\Sigma yi}{h} \right)$$

до вершин его; f и μ уже поясненные выше ср. кв. ошибки линейных измерений. Полагая все углы измеренными одинаково точно ($m_A = \text{const}$) выпишем формулы различных авторов для M^2.

А... для вычислений по неувязанным углам.

Ф-ла 1-я ... $M^2 = \delta^2 + \mu_1^2 [l]_1 + \mu_2^2 [l]_2 + \mu_3^2 [l]_3 + m_A^2 \left(D_{1-2}^2 + D_{1-3}^2 + \dots D_{1-n}^2 \right)$;

$$\text{или } M^2 = M_l^2 + m_A^2 \sum_{i=2}^{i=n} D_{1-i}^2 \; ;$$

дана проф. Ф. Н. Красовским (№ 1 стр. 6).

Ф-ла 2-я ... $M^2 = \mu_1^2 [l]_1 + \mu_2^2 [l] + \mu_3^2 [l]_3 + m_A^2 \{ l_2^2 + 2l_3^2 + \dots (n-1)\, l_n^2 \}$;

$$\text{или } M^2 = M_l^2 + m_A^2 \{ l_2^2 + 2l_3^2 + 3l_4^2 + \dots (n-1 \; l_n^2 \} \; ;$$

дана проф. Н. Н. Веселовским (№ 2 стр. 87).

В... для вычислений по увязанным углам.

Ф-ла 3-я

$$M^2 = \delta^2 + \mu^2 \sum_{i=1}^{i=n} l_i + m_A^2 \{ D_{1-2}^2 + D_{1-3}^2 + \dots D_{1-n}^2 \} -$$

$$- \frac{m_A^2}{n} \{ l_2 \sin\alpha_2 + 2\, l_3 \sin\alpha_3 + \dots (n-1)\, l_n \sin\alpha_n \}^2 -$$

$$- \frac{m_A^2}{n} \{ l_2 \cos\alpha_2 + 2\, l_3 \cos\alpha_3 + \dots (n-1)\, l_n \cos\alpha_n \}^2 \; ;$$

$$\text{здесь } M_l^2 = \delta^2 + \mu^2 \sum_{i=1}^{i=n} l_i \text{, а}$$

---

[1]) Ф-лы проф. М. Г. Михайлова для члена M_A^2 дает выражение $m_A^2 \Sigma L^2_{o-i}$, которое имеет простой вид, но требует предварительной накладки окружной межи по координатам, отыскания на плане центра тяжести вершин полигона, графического определения расстояния L и последующего возведения их в квадрат.

$$M_A^2 = m_A^2 \sum_{i=1}^{i=n} D_{1\text{-}i}^2 - \frac{m_A^2}{n} \left\{ l_2 \sin\alpha_2 + 2l_3 \sin\alpha_3 + (n-1) l_n \sin\alpha_n \right\}^2 -$$

$$- \frac{m_A^2}{n} \left\{ l_2 \cos\alpha_2 + 2l_3 \cos\alpha_3 + \ldots\ldots (n-1) l_n \cos\alpha_n \right\}^2$$

дана проф. Ф. Н. Красовским (№ 1, стр. 9).

Ф-ла 4-я

$$M^2 = \mu_1^2 [l]_1 + \mu_2^2 [l]_2 + \mu_3^2 [l]_3 + m_A^2 \sum_{i=1}^{i=n} L_{o\text{-}i}^2 \quad ;$$

$$\text{или } M^2 = M_l^2 + m_A^2 \sum_{i=1}^{i=n} L_{o\text{-}i}^2 \quad ,$$

дана проф. М. Г. Михайловым (№ 2, стр. 92)

Примечание: Ф-лы выписаны для замкнутых полигонов. Для полигонов разомкнутых, близких к прямолинейному ходу, в ф-лах 1-й и 3-й член δ^2 должен принять вид $f^2 \rho^2$, а в ф-лах 2-й и 4-й, где величина δ^2 не фигурировала (была опущена), должен быть приписан тот же член $f^2 \rho^2$.

Для случая разомкнутого хода с приблизительно одинаковыми длинами сторон и с углами, близкими к 180°, следует указать еще ф-лу:

$$M^2 = f^2 \rho^2 + \mu^2 \rho + m_A^2 \, l^2 \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \quad ,$$

которая после некоторых упрощений последнего члена, ограничиваясь его приближен. значением, дает

$$M^2 = f^2 \rho^2 + \mu^2 \rho + \frac{m_A^2}{3} \cdot \frac{\rho}{l} \rho^2 \quad {}^{1)}$$

Эта формула дана для вычисления по неувязанным углам.

Для случая увязанных углов приближенное выражение последнего члена будет

$$\frac{m_A^2}{12} \cdot \frac{\rho}{l} \cdot \rho^2 \qquad \text{или же } \frac{m_A^2}{12} \cdot n \rho^2 \; {}^{2)}$$

§ 3-й... Если рассматривать вершины полигона, как систему материальных точек, приписав каждой точке массу, равную единице, то выражение

$$\sum_{i=1}^{i=n} L_{o\text{-}i}^2$$

будет ничто иное, как момент инерции нашей системы относительно оси, проходящей через центр тяжести системы O, перпендикулярно к плоскости тертежа. Обозначим этот момент через I_0. Момент инерции нашей системы можно найти относительно осей, проходящих через любую из вершин полигона перпендикулярно к плоскости чертежа (значит, все оси

---

1) См. № 6 стр. 1062;

2) Jordans „Handbuch der Vermessungskunde“, B. II, s. 480.

будут параллельны между собой). Эти моменты инерции обозначим соответственно номерам вершин полигона через I_1 I_2 . . . I_n.

Очевидно:

$$I_1 = \left\{ D^2_{i-3} + D^2_{i-2} + \dots D^2_{i-n} \right\} = \sum_{i=2}^{i=n} D^2_{1-i} \quad ; \quad i \neq 1 \quad ;$$

$$I_2 = \sum_{i=1}^{i=n} D^2_{2-i} \ ; \ i \neq 2 \quad ; \quad I_n = \sum_{i=1}^{i=n-1} D^2_{n-i} \ ; \ i \neq n \quad ;$$

Из механики имеем теорему: момент инерции системы относительно какой либо оси равен моменту инерции той же системы относительно оси, параллельной первой оси, проходящей через центр тяжести системы, + (плюс) произведение массы системы на квадрат расстояния между осями.

Для нашего случая она дает равенства:

$$I_1 = I_0 + nL^2_{o-1} \ ; \ I_2 = I_0 + nL^2_{o-2} \ ; \ . \ . \ . \ . \ I_n + I_0 + nL^2_{o-n} \ .$$

Так как I_0 для данного полигона есть величина постоянная, не зависящая от того, какую из вершин мы выберем за начальную, а расстояния L_{o-i} вообще не равны между собой, то получаем следствие: член M^2_A в ф-ле М. Г. Михайлова, выведенной в предположении предварительной увязки углов, есть величина постоянная, не зависящая от выбора начальной точки, а член M^2_A в ф-ле № 1 проф. Ф. Н. Красовского зависит от такого выбора. Этот вывод не есть что-либо новое. Более общее доказательство упомянутого положения (зависимости величины M_A от выбора начальной вершины при обработке материала по неувязанным углам) сделано проф. А. С. Чеботаревым в 1907 г.[1]) совершенно иным путем. Остановим свое внимание на этой зависимости величины M_A от выбора начальной вершины. Такую зависимость надо признать весьма нежелательным обстоятельством, т. к. для характеристики вполне определенной действительной невязки мы будем получать различные ср. кв. ошибки, величины которых могут отличаться друг от друга на 100% и даже более.

Чтобы такую зависимость уничтожить положим в ф-ле 1-й,

$$M^2_A = m^2_A \frac{I_1 + I_2 + \ . \ . \ . \ I_n}{n} \ ,$$

т.-е. примем для M^2_A среднее из всевозможных в данном полигоне значений. Но

$$\sum_{i=1}^{i=n} I_i = n I_o + n \sum_{i=1}^{i=n} L^2_{o-i} = 2 n I_o \ . \ . \ . \ (I).$$

Приняв для M^2_A среднее значение

$$2 m^2_A \, I_o = 2 m^2_A \sum_{i=1}^{i=n} L^2_{o-i} \ ,$$

---

[1]) См. № 4.

напишем ф-лу 1-ю в виде:

$$M^2 = M_l^2 + 2\,m_A^2 \sum_{i=1}^{i=n} l_{o-i}^2 \quad . \; . \; . \; \text{ф-ла } 1'.$$

Отсюда мы можем получить следствие: значение члена M_A^2, найденное в случае предварительной увязки углов, будет, в среднем, вдвое меньше значения того же члена, полученного при углах неувязанных. Этот вывод хорошо согласуется и с соображениями проф. Ф. Н. Красовского, сделанными им на основании опытных данных [1]).

§ 4... Очевидно, что в ф-ле 2-й член M_A^2 дан в виде зависящем от выбора начальной вершины. Сделаем преобразование этого члена в смысле уничтожения указанной зависимости. Для этого возьмем опять для M_A^2 среднее значение из возможных для него n значений.

Получим

$$M_A^2 = \frac{m_A^2}{n} \Big\{ l_1^2 . 0 + l_2^2 . 1 + l_3^2 . 2 + \; . \; . \; . \; l_{n-2}^2 (n-3) + l_{n-1}^2 (n-2) + l_n^2 (n-1) +$$

$$+ l_2^2 . 0 + l_3^2 . 1 + l_4^2 . 2 + \; . \; . \; . \; l_{n-1}^2 (n-3) + l_n^2 (n-2) + l_1^2 (n-1) +$$

$$. \; .$$

$$+ l_n^2 . 0 + l_1^2 . 1 + l_2^2 . 2 + \ldots l_{n-3}^2 (n-3) + l_{n-2}^2 (n-2) + l_{n-1}^2 (n-1) \Big\}$$

$$M_A^2 = \frac{m_A^2}{n} \sum_{i=1}^{i=n} l_i^2 \Big\} 1 + 2 + \; . \; . \; . + (n-1) \Big\{ = \frac{m_A^2 (n-1)}{2} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} l_i^2 \; .$$

Таким образом ф-ла 2-я примет вид:

$$M^2 = M_l^2 + \frac{m_A^2 (n-1)}{2} \sum_{i=1}^{i=n} l_i^2 \quad . \; . \; . \; \text{ф-ла } 2'$$

§ 5... Преобразуем выражение члена M_A^2 в ф-ле 3-й.

Выражения, стоящие в скобках поправочных членов очевидно суть суммы проэкций диагоналей D_{1-i} на оси ординат и абсцисс.

Значит можно написать:

$$M_A^2 = m_A^2 \Big\{ D_{1-2}^2 + D_{1-3}^2 + \; . \; . \; . \; . \; D_{1-n}^2 \Big\} -$$

$$- \frac{m_A^2}{n} \Big\{ D_{1-2} \sin\beta_{1-2} + D_{1-3} \sin\beta_{1-3} + \; . \; . \; . \; D_{1-n} \sin\beta_{1-n} \Big\}^2 -$$

$$- \frac{m_A^2}{n} \Big\{ D_{1-2} \cos\beta_{1-2} + D_{1-3} \cos\beta_{1-3} + \; . \; . \; . \; D_{1-n} \cos\beta_{1-n} \Big\}^2 \; ;$$

---

[1]) См. № 1, стр. 11; проф. Ф. Н. Красовский принимает коэффициент этого соотношения не два, а полтора ($1^1/_2$).

Производя указанное возведение в квадрат и группируя члены, найдем

$$M_A^2 = m_A^2 \sum_{i=2}^{i=n} D_{1-i}^2 - \frac{m_A^2}{n} \left\{ \sum_{i=2}^{i=n} D_{1-i}^2 \sin^2\beta_{1-i} + \sum_{i=2}^{i=n} D_{1-i}^2 \cos^2\beta_{1-n} \right\} -$$

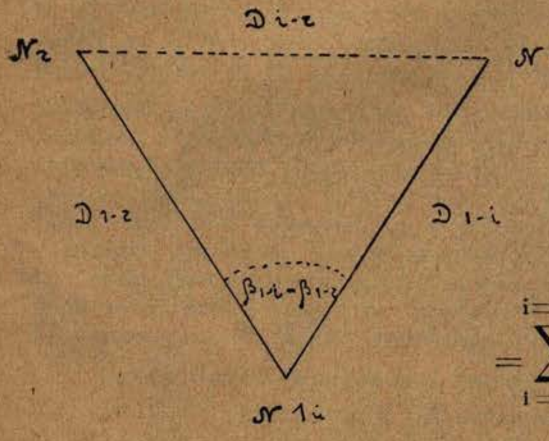
$$-\frac{m_A^2}{n} \left\{ \sum_{i=2}^{i=n} \sum_{r=2}^{r=n} 2D_{1-i} . D_{1-r} \sin\beta_{1-i} \cdot \sin\beta_{1-r} + \sum_{i=2}^{i=n} \sum_{r=2}^{r=n} 2D_{1-i} D_{1-r} \cos\beta_{1-i} \cos\beta_{1-r} \right\} ;$$

$$M_A^2 = \frac{m_A^2(n-1)}{n} \sum_{i=2}^{i=n} D_{1-i}^2 - \frac{m_A^2}{n} \sum_{i=2}^{i=n} \sum_{r=2}^{r=n} 2D_{1-i} D_{1-r} \cos(\beta_{1-i} - \beta_{1-r}) ;$$

Выражение

$$\sum_{i=2}^{i=n} \sum_{r=2}^{r=n} 2D_{1-i} D_{1-r} \cos(\beta_{1-i} - \beta_{i-r})$$

представляет сумму членов, число коих равно C_{n-1}^2 (числу сочетаний)



Черт 1-й

Из прилагаемого чертежа видно, что $2D_{1-i}D_{1-r}\cos(\beta_{1-i} - \beta_{1-r}) =$
$= D_{1-i}^2 + D_{1-r}^2 - D_{i-r}^2$.

Значит,

$$\sum_{i=2}^{i=n} \sum_{r=2}^{r=n} 2D_{1-i} D_{1-r} \cos(\beta_{1-i} - \beta_{1-r}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{r=1}^{r=n} (D_{1-i}^2 + D_{1-r}^2 - D_{i-r}^2) =$$

$$= \sum_{i=2}^{i=n} \sum_{r=2}^{r=n} (D_{1-i}^2 + D_{1-r}^2) -$$

$$- \sum_{i=2}^{i=n} \sum_{r=2}^{r=n} D_{i-r}^2 .$$

В сумме

$$\sum_{i=2}^{i=n} \sum_{r=2}^{r=n} (D_{1-i}^2 + D_{1-r}^2)$$

есть общие члены, и нетрудно сообразить, что каждый член здесь повторяется слагаемым (n—2) раза. Так что

$$\sum_{i=2}^{i=n}\sum_{r=2}^{r=n}(D^2_{1-i}+D^2_{i-r})=(n-2)\sum_{i=1}^{i=n}D_{1-i}\quad,\ \text{а}$$

$$M^2_A=\frac{m^2_A(n-1)}{n}\sum_{i=2}^{i=n}D^2_{1-i}-\frac{m^2_A(n-2)}{n}\sum_{i=2}^{i=n}D^2_{1-i}+\frac{m^2_A}{n}\sum_{i=2}^{i=n}\sum_{r=2}^{r=n}D^2_{i-r}\ ;$$

$$M^2_A=\frac{m^2_A}{n}\left\{\sum_{i=2}^{i=n}D^2_{1-i}+\sum_{i=2}^{i=n}\sum_{r=2}^{r=n}D^2_{i-r}\right\}.$$

$\sum_{i=2}^{i=n}\sum_{r=2}^{r=n}D^2_{i-r}$ есть сумма квадратов диагоналей от второй вершины ко всем последующим, $+$ (плюс) от третьей вершины ко всем последующим, плюс $(+)$ и так далее.

Тут уже повторяющихся членов нет и каждый член входит по одному разу. Отсюда видно, что

$$\left\{\sum_{i=2}^{i=n}D^2_{1-i}+\sum_{i=2}^{i=n}\sum_{r=2}^{r=n}D^2_{i-r}\right\}$$

есть сумма квадратов всевозможных диагоналей нашего полигона, включая сюда и стороны полигона, причем каждый член входит по одному разу, т.-е. более обще можно написать

$$M^2_A=\frac{m^2_A}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{r=1}^{r=n}D^2_{i-r}\ .\ .\ .\ (D).$$

Возьмем выражение

$$2\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{r=1}^{r=n}D^2_{i-r}\ .$$

Здесь каждый член будет повторяться дважды. Очевидно,

$$2\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{r=1}^{r=n}D^2_{i-r}=\sum_{i=2}^{i=n}D^2_{1-i}+\sum_{i=3}^{i=1}D^2_{2-i}+\ .\ .\ .\ \sum_{i=1}^{i=n-1}D^2_{n-i}\ .$$

Значит, согласно принятому нами обозначению,

$$2\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{r=1}^{r=n}D^2_{i-r}=I_1+I_2+\ .\ .\ .\ I_n=\sum_{i=1}^{i=n}I_i\ .$$

А согласно ф-лы (I)

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{r=1}^{r=n} D^2_{i-r} = nI_o \ .$$

Значит

$$M^2 = M_l^2 + m_A^2 \ I_o = M_l^2 + m_A^2 \sum_{i=1}^{i=n} L^2_{o-i} \ ,$$

т.-е. получим ф-лу проф. М. Г. Михайлова [1]).

Ввиду тождества ф-л № 3 и № 4 в последующем условимся относить сравнение данных по остальным ф-лам к данным, получаемым по ф-ле М. Г. Михайлова (№ 4), т. к. она легче для вычислений. Строго говоря, из взятых вначале четырех ф-л остается вести сравнение преобразованной нами ф-лы Н. Н. Веселовского (носящей приближенный характер):

$$M^2 = M_l^2 + \frac{m_A^2 (n-1)}{2} \sum_{i=1}^{i=n} l_i^2$$

с формулой № 4:

$$M^2 = M_l^2 + m_A^2 \sum_{i=1}^{i=n} L^2_{o-i} \ ,$$

носящей строгий характер, т. к. член M_A^2 фо-лы 1-й в результате ее преобразования, уже найден теоретически.

§ 6. Для дальнейших выводов необходимо доказать предварительно следующую лемму: Если угловую невязку V нашего полигона разложить с обратным знаком поровну на все измеренные углы и затем вычислить азимуты сторон, то эти азимуты будут равны значениям, полученным для азимутов тех же сторон путем определения их вероятнейшего значения. Это вероятнейшее значение берется как арифметическая средина по весам из двух значений: одного найденного по ходу и другого—против хода по окружной меже. Принимая все углы одинаково точными и полагая их веса равными еденице мы вес азимута должны положить равным величине, обратной числу углов, вошедших в вычисление данного значения азимута. Угловая невязка V найдется по ф-лам:

в замкнутом полигоне: $V = \sum_{i=1}^{i=n} A_i - 180^\circ (n-2) \ .$

и в разомкнутом полигоне: $V = (\alpha_n - \alpha_o) - 180^\circ . \, n + \sum_{i=1}^{i=n} A_i \ .$

---

[1]) Тождество ф-л 3-й и 4-й уже ранее было установлено проф. А. С. Чеботаревым (см. № 3) путем иных выводов. Свое доказательство я привожу лишь для достижения полноты трактуемого вопроса.

В последнем случае A_1 и A_n суть примычные углы, а α_0 и α_n — заранее известные азимуты сторон примыкания. Докажем лемму для азимута линии с номером S в замкнутом полигоне. По первому способу имеем

$$\alpha_s = \alpha_1 + 180^\circ (s-1) - A_2 - A_3 - \ldots - A_s + \frac{v}{n}(s-1) \,.$$

По второму способу, по ходу, найдем

$$\alpha'_s = \alpha_1 + 180^\circ (s-1) - A_2 - A_3 - \ldots - A_s \text{ с весом } g'\alpha_s = \frac{1}{s-1} \,.$$

Желая найти α_s против хода, т.-е. выразить его через остальные углы, заметим, что $(A_2 + A_3 + \ldots A_s) = 180(n-2) - A_1 - A_n - \ldots A_{s+1}$;
Значит, $\alpha''_s = \alpha_1 + 180^\circ (s-1) - 180^\circ (n-2) + A_1 + A_n \ldots A_{s+1}$.
или же $\alpha''_s = \alpha_1 - 180^\circ (n-s+1) + A_1 + A_n + \ldots A_{s+1} + 360^\circ$

$$\text{с весом } g''\alpha_s = \frac{1}{n-s+1} \,.$$

$$\text{Вероятнейшее значение } \alpha_s = \frac{[g\alpha_s \,.\, \alpha_s]}{[g\alpha_s]}$$

Подставляя сюда найденные выше значение для α_s и для $g\alpha_s$, после несложных преобразований, получим:

$$\alpha_s = \alpha_1 + 180^\circ (s-1) - A_2 - A_3 - \ldots A_s + \frac{v}{n}(s-1)$$

$$\text{с весом } g\alpha_s = \frac{n}{(s-1)(n-s+1)} \,.$$

Таким образом лемма доказана [1]).

Примечание: Пользуясь этой леммой при упрощенном способе уравновешивания полигонометрического хода[2]) и для случая определения вероятнейших значений азимутов в замкнутых полигонах[3]), мы облегчим определение искомых значений азимутов.

§ 7. Ф-ла Н. Н. Веселовского, хотя бы в преобразованном уже виде, выведена для случая обработки материала по углам неувязанным. Сделаем вывод подобной формулы для случая увязанных углов.

Имеем: $x_n = l_1 \cos\alpha_1 + l_2 \cos\alpha_2 + \ldots l_n \cos\alpha_n$; $y_n = l_1 \sin\alpha_1 + l_2 \sin\alpha_2 + \ldots l_n \sin\alpha_n$

$$\text{откуда: } m^2_{x_n} = l^2_1 \sin^2\alpha_1 \cdot m^2_{\alpha_1} + l^2_2 \sin^2\alpha_2 \cdot m^2_{\alpha_2} + \ldots l^2_n \sin^2\alpha_n \cdot m^2_{\alpha_n} \,;$$

$$m^2_{y_n} = l^2_1 \cos^2\alpha_1 \cdot m^2_{\alpha_1} + l_2 \cos^2\alpha_2 \cdot m^2_{\alpha_2} + \ldots l^2_n \cos^2\alpha_n \cdot m^2_{\alpha_n} \,;$$

$$M^2_A = m^2_{x_n} + m^2_{y_n} = l^2_1 \cdot m^2_{\alpha_1} + l^2_2 \cdot m^2_{\alpha_2} + \ldots l^2_n \cdot m^2_{\alpha_n} = \left[l^2_i m^2_{\alpha_i} \right]^{i=n}_{i=1} \,.$$

Определяя $m^2_{x_n}$ и $m^3_{y_n}$ мы не интересовались ошибками линейных измерений и брали производные по азимутам α. Конечно производные,

---

[1]) См. об этом также „Способ наименьших квадратов" проф. А. С. Чеботарева, стр. 61.

[2]) См. № 6 стр. 1088—1091.

[3]) См. № 5.

надо-бы брать по величинам, непосредственно измеренным, т.-е. по углам A, как это и делает проф. Ф. Н. Красовский. Беря производные по азимутам мы уже заведомо выводим ф-лу лишь приближенную, каковой является и ф-ла Н. Н. Веселовского для неувязанных углов.

Проделать вывод я считаю не лишним для того, чтобы затем сравнить члены M_A^2 в выводимой ф-ле и в ф-ле № 2'. Из этого сравнения мы убедимся, что M_A^2 для случая увязанных углов будет втрое меньше, чем для углов неувязанных. На основании леммы § 6 можем написать:

$$m_{\alpha_1}^2 = \frac{m_A^2}{g_{\alpha_1}}; \; m_{\alpha_2}^2 = \frac{m_A^2}{g_{\alpha_2}}; \; . \; . \; . \; m_{\alpha_n}^2 = \frac{m_A^2}{g_{\alpha_n}}.$$

Значит,

$$M_A^2 = m_A^2 \left\{ l_1^2 \cdot \frac{1}{g_{\alpha_1}} + l_2^2 \frac{1}{g_{\alpha_2}} + \; . \; . \; . \; l_n^2 \frac{1}{g_{\alpha_n}} \right\}.$$

Чтобы упростить ф-лу и сделать M_A^2 независимым от выбора начальной вершины, возьмем вероятнейшее значение M_A^2, как простую арифметическую средину из отдельных значений M_A^2, найденных для всех n вершин, поочередно принимаемых за начальную.

Совершенно ясно, что если мы $n^{\text{-ю}}$ вершину примем за начальную, то безошибочным придется положить уже азимут α_n; ошибка азимута α_1 будет тогда $\frac{m_A^2}{g_2}$, для α_2 ошибка будет $\frac{m_A^2}{g_{\alpha_s}}$ и т. д. Легко сообразить, как будут меняться ошибки азимутов сообразно выбору начальной вершины.

Значит,

$$\sum M_A^2 = m_A^2 \left\{ l_1^2 \left[\frac{1}{g}\right] + l_2^2 \left[\frac{1}{g}\right] + \; . \; . \; . \; l_n^2 \left[\frac{1}{g}\right] \right\} = m_A^2 \left[\frac{1}{g}\right] \cdot \sum_{i=1}^{i=n} l_i^2;$$

$$\text{среднее } M_A^2 = \frac{m_A^2}{n} \left[\frac{1}{g}\right] \cdot \sum_{i=1}^{i=n} l_i^2.$$

$$\text{Но} \left[\frac{1}{g}\right] = \frac{(n-1)}{n} + \frac{2(n-2)}{n} + \frac{3(n-3)}{n} + \; . \; . \; . \; \frac{(n-1)\left[n-(n-1)\right]}{n};$$

$$\left[\frac{1}{g}\right] = \frac{1}{n}\left[n + 2n + 3n + \; . \; . \; . \; (n-1) \cdot n - (1^2 + 2^2 + \; . \; . \; . \; (n-1)^2 \right];$$

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{1}{g}\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{n \cdot n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right] = \frac{n(n-1)(n+1)}{6n} = \frac{n^2-1}{6}; \\ &\text{и далее} \left[m_\alpha^2\right] = \left[\frac{m_A^2}{g}\right] = m_A^2 \left[\frac{1}{g}\right] = m_A^2 \frac{n^2-1}{6}. \end{aligned}\right\} \ldots (g).$$

$$\text{Значит, среднее } M_A^2 = \frac{m_A^2(n^2-1)}{6n} \sum_{i=1}^{i=n} l_i^2 \; . \; . \; . \; \text{ф-ла } 6.$$

Для полигонов, обычно встречающихся на практике, где число углов и вообще больше 10, мы смело можем отбросить член

$$\frac{M_A^2}{6n}\sum_{i=1}^{i=n} l_i^2 \text{ и положить}$$

$$M_A^2 = \frac{m_A^2 \cdot n}{6} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} l_i^2 \; . \; . \; . \text{ ф-ла } 6'.$$

Сравнивая члены M_A^2 в формулах 6 и 2' видим, что почти точно в первом случае (ф-ла 6) член M_A^2 получается втрое меньше, чем во втором (ф-ла 2'). Это лишний раз показывает, что если, в случае измерений одинаковой точности, угловую невязку разложить поровну на все углы, то влияние угловых ошибок на величину линейной невязки значительно понизится (в 2—3 раза). При обычном способе округления углов до минуты и последующей разброске невязки на отдельные углы, конечно, таких строгих соотношений ожидать нельзя. Позволительно думать, что подобная увязка еще может увеличить влияние ошибок измерения углов. Поэтому осторожнее в нашей практике применять для члена M_A^2 следующие выражения:

$$\text{в ф-ле М. Г. Михайлова . . . } M_A^2 = 2\, m_A^2 \sum_{i=1}^{i=n} L_{o-i}^2 ;$$

$$\text{в ф-ле № } 6' \text{ . . . } M_A^2 = \frac{m_A^2\, n}{2} \sum_{i=1}^{i=n} l_i^2 .$$

§ 8 Приближенный характер ф-л 2' и 6' очевиден из самого их вывода; это обстоятельство подтверждается и опытным путем (см. прилагаемую таблицу). Пример близкого значения невязок по ф-ле № 2 и по ф-ле М. Г. Михайлова, данный в курсе „Полигонометрическая сеть“, совершенно нехарактерен, т. к. взят небольшой полигон с малым количеством вершин[1])

Но ф-ла 6', по сравнению с ф-лой М. Г. Михайлова, подкупает большей простотой подготовительной работы Здесь не требуется предварительной накладки окружной межи и все необходимые величины нам известны из мер с натуры.

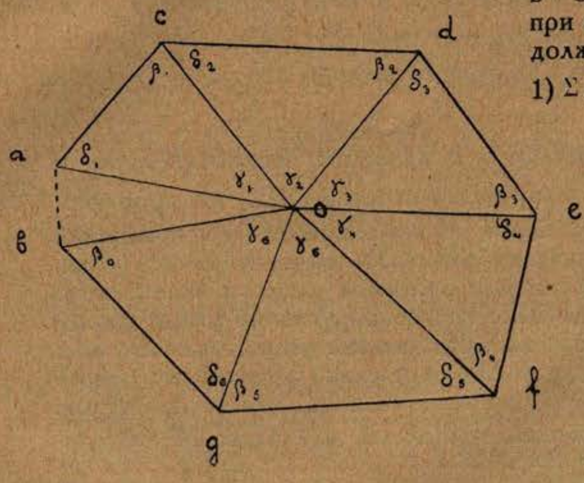
Попробуем вывести для M_A^2 ф-лу, требующую минимальной подготовки и вычислений и обладающую большей точностью, нежели ф-лы 2' и 6.

Предположим, что в некотором замкнутом полигоне стороны измерены идеально точно, а углы лишь с известной точностью Положим измерение углов одинаково точным и назовем ср кв. ошибку измерения угла через m_A . Такое временное выключение учета ошибок линейных измерений мы сделать вправе, т. к. ошибки линейных и угловых измере-

---

1) См. № 2, стр. 95; ф-лы № 2, и № 6' дают хорошие результаты лишь для полигонов с небольшим количеством вершин.

ний взаимно независимы. Но тогда получившаяся невязка *ab* будет об'ясняться лишь погрешностями измерения внутренних углов A_i (см. черт. 2-й). Возьмем внутри полигона некоторую точку O и соединим с нею концы невязки. Далее соединим точку O и со всеми остальными вершинами полигона c, d, e, f, g. Очевидно в замкнутом многоугольнике, при отсутствии невязки в углах, должны иметь:



Черт. 2-й

$$1)\ \Sigma A_i = \Sigma \delta_i + \Sigma \beta_i = 180^\circ (n-2);$$

$$2)\ \Sigma \gamma_i = 180^\circ.2;$$

$$3)\ \Sigma \gamma_i + \Sigma \alpha_i + \Sigma \beta_i = 180^\circ.n.$$

Если же полигон, вследствие погрешностей измерения углов A_i разомкнулся, то выполнятся будет лишь условие 3-е, а для первых двух мы получим:

$$\Sigma A_i = 180^\circ (n-2) \pm \mu_A;$$

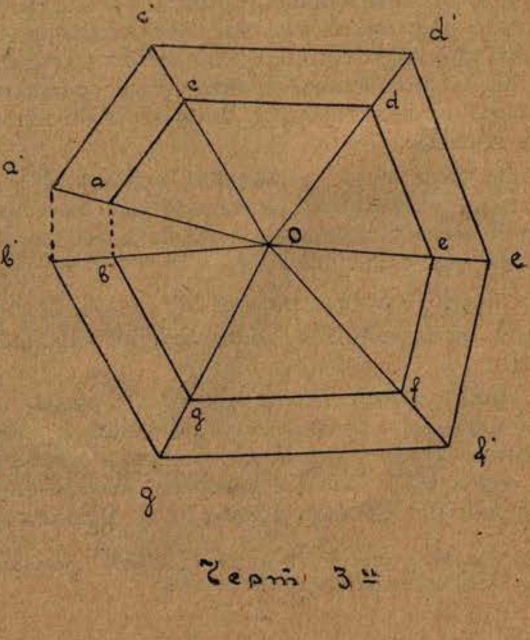
где μ_A есть невязка в углах и $\Sigma \gamma_i = 2 . 180^\circ - \angle aob$. Отсюда имеем $\mu_A = \angle aob$. Если для точки O установить определенное положение, то придем к выводу, **что линейная невязка полигона, проистекающая благодаря погрешностям угловых измерений, прямо пропорциональна угловой невязке μ_A полигона, т.-е.** $ab = k . \angle aob$.

Если теперь, обращаясь к черт. 3, возьмем два подобных полигона с периметрами P и P' и с одинаковой угловой невязкой μ_A, **то линейные невязки этих полигонов мы должны положить прямо пропорциональными их приметрам, т.-е.**

$$a'b' = ab \cdot \frac{P'}{P} = k \angle aob \frac{P'}{P} \cdot$$

Отсюда мы приходим к заключению, **что линейную невязку полигона** ab **следует считать прямо пропорциональной произведению угловой невязки на периметр, т.-е. положить** $ab = k . \mu_A . P$.

Переходя к средним значениям, следует положить μ_A равной ср. кв. ошибке суммы n углов полигона, т.-е. положить $\mu_A = m_A \sqrt{n}$, а вместо ab писать уже известное нам обозначение M_A, т.-е. $M_A = k m_A \sqrt{n}\ P$, где k есть покуда неизвестный нам коэффициент.



Черт. 3-й

Принимая в ф-ле $M_A = km_A\sqrt{n}\,\rho$ k за постоянный коэффициент, мы тем самым даем точке O в данном полигоне некоторое определенное положение относительно вершины, выбираемой за начальную. Именно мы принимаем расстояние начальной вершины от точки O равным $k\rho$, что очевидно из чертежа 2-го.

Чтобы подойти к определению коэффициэнта k, сразу же отметим тот факт, что принимая k постоянным, мы допускаем важное предположение, а именно:

Форма окружной межи полигона не влияет на величину невязки M_A [1]). Если это положение принять, то величину k легче всего будет отыскать, обращаясь к правильным многоугольникам, (напр., вписанным в окружность некоторого радиуса R).

В неправильном многоугольнике, при перемене начальной вершины, будет меняться и положеиие точки O. Но в многоугольниках правильных положение точки O будет постоянно, т. к. тут она совпадает с центром описанной окружности. Значит, для многоугольников правильных расстояние начальной вершины от точки O, равное $k\rho = R$ (радиус описанной окружности), откуда $1 : k = \frac{\rho}{R}$. В приводимой ниже таблице найдены величины $1 : k$ для правильных вписанных многоугольников с разным количеством вершин.

Число верш. n	3	4	6	8	10	12	15	∞
Значение $1 : k = \frac{\rho}{R}$	5,20	5,66	6,00	6,12	6,18	6,22	6.24	6,28

Конечно, правильнее было бы для каждого полигона брать свое значение k по аргументу n.

Однако, мы видим, что начиная с $n = 12$ величина k становится почти константной. А так как в землеустроительной практике редко встречаются полигоны с числом вершин меньшим 12, то можно принять **k равным некоторому среднему значению.**

Удобно принять величину $1 : k$ такой, чтобы $1 : k^2$ было числом целым. Положим $1 : k = 6,245$ $(1 : k^2 = 39)$. Тогда для M_A получаем конкретную ф-лу

$$M_A = \frac{m_A\sqrt{n}\,\rho}{6,245}\;;\quad M_A^2 = \frac{m_A^2 \cdot n \cdot \rho^2}{39}\;;\quad \text{Ф-ла 7.}$$

Для случая углов предварительно увязанных величина M_A^2 должна быть несколько уменьшена как показывает опыт, она должна быть уменьшена в $\sqrt{2}$ раз. Так что для случая увязанных углов, в целых числах мы получим

$$M_A^2 = \frac{m_A^2 \cdot n \cdot \rho^2}{55}\; .\;.\;.\;.\;.\;\; \text{Ф-ла } 7'$$

Сравнивая теперь полученное нами для M_A^2 значение с ф-лой поперечного уклонения для полигонов разомкнутых, вытянутых по прямому

---

[1]) О влиянии формы полигона на величину относительной невязки в периметре $\left(\frac{M}{\rho}\right)$ см. № 3 и № 7.

направлению и со сторонами приблизительно одинаковой длины[1]) мы видим, что неожиданно пришли к почти тождественным выражениям. Только в обоих случаях коэффициент k имеет совершенно различное значение. В нашем случае он равен $\sqrt{1/39}$, а для растянутого полигонометрического хода $k = \sqrt{1/3}$. Если в подобном полигонометрическом ходе предварительно увязать углы и ввести коэффициент понижения члена M_A^2, например, в 2 раза, то для этого случая мы получим

$$M_A^2 = \frac{m_A^2 \cdot n \,.\, \rho^2 \quad {}^{2)}}{6} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{Ф-ла } 8.$$

Если посчитать сверх того ошибку M_A, даваемую ф-лой 8-й, предельной, то мы получим среднее значение для $M_A^2 = \frac{m_A^2 \,.\, n \,.\, \rho^2}{54}$, т.-е. выражение, совсем равнозначное ф-ле 7′

Примечание: При взятом значении $1/k = 6{,}245$, мы для замкнутых полигонов с малым количеством вершин, напр. $n < 10$, будем получать член M_A несколько преуменьшенным. В этом случае я считал бы возможным принять $1/k = 6{,}000$ и

$M_A^2 = \frac{m_A^2 \,.\, n \,.\, \rho^2}{51}$. Для правильных полигонометрических ходов выражение 8 тоже может применяться лишь при значительном n, (напр. $n > 10$), т. к. оно является приближенным.

§ 9. Принимая выражение члена M_A^2, данное ф-лой 7′, мы получим для квадрата линейной невязки следующее:

Для полигона замкнутого:

$$M^2 = \delta^2 + \mu_1^2 [l]_1 + \mu_2^2 [l]_2 + \mu_3^2 [l]_3 + \frac{m_A^2 \,.\, n}{55} \rho^2 \quad . \; . \; . \; . \; \text{I},$$

или, если пренебречь разделением местности на классы:

$$M^2 = \mu^2 \rho + \frac{m_A^2 \,.\, n}{55} \rho^2 + \delta^2 \quad . \; . \; . \; . \; \text{II}.$$

Согласно выводам проф. Ф. Н. Красовскаго[3]) величину δ можно принять равной произведению коэффициэнта f на длину наибольшей диагонали нашего полигона (D max), т.-е. положить $\delta = f\,D\max$, причем f, для неблагоприятных условий, принимается равным 0,00024.

Для полигонов разомкнутых с углами, близкими к 180° и приблизительно равными сторонами[4])

$$M^2 = f^2 \rho^2 + \mu_1^2 [l]_1 + \mu_2^2 [l]_2 + \mu_3^2 [l]_3 + \frac{m_A^2 \,.\, n \,.\, \rho^2}{12} \quad . \; . \; . \; . \; \text{III},$$

---

[1]) См. № 6, стр. 1060—1062;

[2]) „Handbuch der Vermessungskundt“ ordan'a, B. II. s. 480

Здесь $M_A^2 = \frac{m_A^2 \,.\, n\rho^2}{12}$

[3]) См. № 1, стр. 16.

[4]) Значение члена M_A^2 принято по Jordan'y

или, если не различать классов местности,

$$M^2 = f^2 \rho^2 + \mu^2 \rho + \frac{m_A^2 \cdot n}{12} \rho^2 \ . \ . \ . \ IV$$

Примечание: В ф-лах III и IV значение коэффициента k применено мною согласно прежним выводам ($k = {}^1/_{12}$) и опытным путем не проверялося. Есть основания думать, что это значение можно считать преувеличенным. Надо отметить, что во всех ф-лах величина m_A^2 предполагалась выраженной в отвлеченной мере, так что, при условии выражения ср. кв. ошибки угла в минутах, все члены, выражающие влияние угловых ошибок, необходимо умножить на $sn^2\, 1' = 0{,}0000000846$.

§ 10. Что касается числового значения коэффициентов f, μ и m_A, входящих в ф-лы невязок, то собранный кафедрой Геодезии материал является еще недостаточно проверенным, невелик количественно и не может служить основанием для вывода надежных значений означенных коэффициентов. В ближайшие годы подобный материал будет собран, обработан и опубликован, по всей вероятности, в виде дипломной работы сотрудников кафедры Геодезии Бел. Академии С. Х.

Покуда же приведем значение этих коэффициентов по различным источникам. Так, материал, собранный немецкими исследователями, для условий Германии, приводит к результатам средних значений[1])

Местность	1-го кл.	2-го кл.	3-го кл.
в метрах μ =	0,00453	0.0056	0,0065
в сажен. μ =	0,00302	0.0038	0,0044
f =	0.000242	0,000296	0,000342

Эти коэффициенты оказались пригодными и даже несколько преувеличенными и для русских условий. Проф. Ф. Н. Красовский на основании сводки обширного опытного материала для условий нашего Союза, принимает (в саженях): [2])

$\mu_1 = 0{,}0025$; $\mu_2 = 0{,}0040$; $\mu_3 = 0{,}0060$;
$f\ min = 0{,}00018$ (для городских с‘емок)
$f\ max. = 0{,}00024$ (для неблагопр. условий)

Для ср. кв. ошибки измерения отдельного угла в обычных замкнутых полигонах для одноминутных теодолитов можно принять значение $\pm\, 0{,}'80$. Лишь в полигонах, где большинство сторон короче 40^c (85,34 м.), m_A, в общем, превосходит одну минуту ($\pm\, 1'$)[3])

Для разомкнутых полигонометрических ходов правильного вида m_A определится каждый раз особо. Есть основания считать, что в том случае m_A имеет значение, близкое к $\pm 0{,}'5$, при условии применения угломеров с одноминутной точностью.

§ 11. Для проверки степени строгости формулы II исследовательскими сотрудниками кафедры геодезии И. И. Агроскиным и А. А. Тиха-

---

[1]) См. № 2 стр. 31.
[2]) См. № 1.
[3]) Тоже.

новичем была проделана опытная работа, данные которой сведены в прилагаемую таблицу. Именно, вычислялась для самых разнообразных полигонов линейная невязка М по четырем ф-лам: № 4 (М. Г. Михайлова), № 6′, II и по ф-ле

$$M = {}^{1}/{}_{3}\sqrt{(0{,}025\sqrt{P})^2 + \left(0{,}087\,\frac{P}{100}\right)^2} \quad {}^{1})$$

Последняя ф-ла дает допустимую разность между двумя результатами измерения линии Р. Данные для М пришлось вычислить (в метрах), т. к. по соответствующим таблицам2) можно было найти М лишь для небольших периметров (для 2-го класса местности не свыше 4225 метров).

Т. к., в общем, местность, по которой пролегали наши хода, должна быть отнесена ко 2-му классу, то для μ принято значение $\pm 0{,}006$; для m_A примем величину $\pm 1' = \pm 0{,}0000000846$. Все линейные данные таблицы приведены в метрической мере, т. что ф-ла II для это случая давала

$$M_{cp} = 0{,}01\sqrt{0{,}36\,P + 0{,}000154\,nP^2} \quad {}^{3})$$

Рассматривая таблицу можно придти к следующим заключениям, подтверждающим сказанное частью уже ранее.

1) Таблицы допустимых разностей двойного измерения линий для определения допустимой линейной невязки полигона не пригодны и по своему существу и по даваемым ими результатам.

2) Ф-лы 6 и 2′ дают хорошие результаты лишь для полигонов с небольшим количеством вершин и совершенно непригодны для условий землемерной практики в землеустройстве.

3) Ф-ла № 4 (М. Г. Михайлова) требует значительной работы и затраты времени и для землемерной практики поэтому непригодна.

4) Определение невязки по ф-ле II производится значительно быстрее и легче, нежели по ф-лам 4 и даже, чем по фор-лам 6 и 2′.

5) Ф-ла II дает несколько преуменьшенные результаты для полигонов с малым n (см. § 8) и хороша для полигонов с $n > 10$, т. что при малом n ($n < 10$) необходимо брать в ф-ле II член M_A^2 в виде $\dfrac{m_A^2 \cdot n \cdot P^2}{51}$

6) Относя все сравнения к ф-ле 4, как к строгой, можно рекомендовать для землемерной практики ф-лу II, как наиболее простую и достаточно точную.

§ 12. При составлении таблицы значений невязки М не учитывался член δ, выражающий влияние систематических ошибок линейных измерений, который в замкнутых полигонах имет вид $f \cdot D\,max$ и в правильных полигонометрических ходах вид $f \cdot P$.

Примем для первого случая $f = 0{,}00024$, а для второго $f = 0{,}00019$ и найдем предельные значения линейных невязок по ф-лам I и III для разных классов местности, причем значения μ для 1 го, 2-го и 3-го классов местности примем (в метрах): 0,00453; 0,0056 и 0,0065. Значение квадрата ср. кв. ошибки отдельнаго угла (m_A^2) для обычных замкнутых полигонов возьмем равным $\pm 0{,}0000000846$, а для правильных полигонометрических ходов положим $m_A^2 = \pm 0{,}0000000211$4).

---

1) См. № 6, стр. 1066.

2) F. G. Gauss „Polygonometrische Tafeln“ Stutgart, 1921 г.

3) Член δ^2 временно оставлен, т. к. он одинаков во всех ф-лах.

4) См. № 2, стр. 56.

Таблица средних значений линейной невязки M для замкнутых полигонов с увязанными углами.

№№ по порядку	Число вершин n.	Периметр P	$M_l^2 = \mu^2 P$	M_A^2			M			
				$m_A^2 \sum_{i=1}^{i=n} L_{o-i}^2$	$m_A^2 \frac{n^2-1}{6n} \sum_{i=1}^{i=n} l_i^2$	$m_A^2 \frac{n}{55} P^2$	$\sqrt{\mu^2 P + m_A^2 \sum L_{o-i}^2}$	$\sqrt{\mu^2 P + m_A^2 \frac{n^2-1}{6n} \sum l_i^2}$	$\sqrt{\mu^2 P + \frac{m_A^2}{55} P^2 . n}$	$\frac{1}{3} \sqrt{(0{,}025 \sqrt{P})^2 + \left(0{,}087 \frac{P}{100}\right)^2}$
1	6	836	0,03	0,02	0,02	0,01	0,22	0,20	0,20	0,34
2	7	2836	0,10	0,13	0,13	0,09	0,48	0,48	0,44	0,93
3	8	2038	0,07	0,07	0,06	0,05	0,37	0,36	0,35	0,69
4	9	1668	0,06	0,05	0,04	0 04	0,33	0,32	0,32	0,59
5	10	2811	0,10	0,12	0,12	0,12	0,47	0,47	0,47	0,92
6	12	3359	0,12	0,20	0,18	0,21	0,57	0,55	0,57	1,09
7	16	4168	0,15	0,42	0,40	0,43	0,75	0,74	0,76	1,32
8	17	4112	0,15	0,42	0,31	0,44	0,80	0,68	0,77	1,31
9	19	3570	0,13	0,33	0,23	0,37	0,68	0,60	0,71	1,04
10	19	6749	0,24	1,33	0,84	1,34	1,26	1,04	1,26	2,07
11	20	4780	0,17	0,75	0,43	0,71	0,96	0,72	0,93	1,50
12	20	2797	0,10	0,17	0,17	0,24	0,52	0,52	0,58	0,92
13	25	4543,5	0,16	0,73	0,41	0,80	0,94	0,76	0,97	1,43
14	30	5045	0,18	0,95	0,52	1,18	1,06	0,83	1,17	1,58
15	28	5666	0,20	1,35	0,54	1,39	1,25	0,86	1,26	1,79
16	40	3972	0,14	0,90	0,27	0,98	1,02	0,64	1,06	1,27
17	47	9916	0,36	5,97	2,12	7,14	2,52	1,58	2,74	3,00
18	50	6402	0,24	2,84	1,08	3,58	1,75	1,15	1,95	2,09
19	59	13309	0,48	13,84	3,48	16,07	3,78	1,99	4,07	3,98
20	76	7527	0,27	6,03	1,33	6,65	2,51	1,26	2,63	2,30

Нетрудно видеть, что предельные значения квадратов $d_A^2 = (3M_A)^2$ членов, выражающих влияние угловых погрешностей, будут следующие:

$d_A^2 = 0{,}00014 \, . \, n P^2 (0{,}01)^2$ . . . . . для обычных полигонов,

$d_A^2 = 0{,}00016 \, . \, n P^2 (0{,}01)^2$ . . . . . для полигонометрических ходов

Подсчитаем квадраты предельных значений членов $fD\max.$ и fP, т.-е. найдем $(3fD\max.)^2$ и $(3fP)^2$. Очевидно, $(3fP)^2$ при $f = 0{,}00019$ даст приблизительно $0{,}0032 P^2 (0.01)^2$, т. что для правильных полигонометрических ходов имеем

$$9M_A^2 + 9f^2P^2 = 0{,}00016(n+20)P^2 . (0{,}01)^2.$$

Чтобы найти подобное же выражение для замкнутых полигонов произвольного вида, сообразим какую часть периметра может составлять $D\max$. Очевидно, что $D\max$ может менятся от $P/2$ в замкнутых полигонах, сливающихся в прямую линию, до $P/3$ в полигонах правильного округлого вида. Принимая возможный максимум, т.-е. полагая

$D\max = P/2$ мы при $f = 0{,}00024$ найдем $9f^2D^2\max. = 0{,}0014P^2.(0{,}01)^2$ (приближенно), так что в этом случае

$$9M_A^2 + 9f^2D^2\max = (0{,}01)^2. \;\; 0{,}00014(n+10)P^2.$$

Отсюда следует, что влияние систематических ошибок линейных измерений на линейную невязку весьма значительно, и при малом числе углов может превосходить член M_A, зависящий от ошибок измерения углов даже в полигонах замкнутых.

Полагая $n > 10$ и допуская некоторое округление коэффициентов можем теперь написать предельные значения полных линейных невязок для случая предварительно увязанных углов.

А. Для полигонов замкнутых:

1 кл. . . . $d_1 = (3M) = 0{,}01\sqrt{1{,}8P + 0{,}00014(n+10)P^2}$ метров

2 кл. . . . $d_2 = (3M) = 0{,}01\sqrt{2{,}8P + 0{,}00014(n+10)P^2}$ „

3 кл. . . . $d_3 = (3M) = 0{,}01\sqrt{3{,}8P + 0{,}00014(n+10)P^2}$ „

В. Для полигонометрических ходов правильной формы:

1 кл. . . . $d_1 = (3M) = 0{,}01\sqrt{1{,}8P + 0{,}00016(n+20)P^2}$ метров

2 кл. . . . $d_2 = (3M) = 0{,}01\sqrt{2{,}8P + 0{,}00016(n+20)P^2}$ „

3 кл. . . . $d_3 = (3M) = 0{,}01\sqrt{3{,}8P + 0{,}00016(n+20)P^2}$ „

Таким образом приходим к заключению о возможности применения однотипных ф-л линейных невязок, как для правильных полигонометрических ходов, так и для полигонов замкнутых, произвольного вида. Для облегчения вычисления величин d по проводимым ф-лам составление таблиц следует признать неудобным, т. к. d зависит от двух аргументов n и P. Мне кажется, что здесь уместно было-бы применение соответствующей монограммы.

П. Ходорович.

„Ueber die Formeln linealer Schlussfehler ber Poligonzüge“.

Zusammenfassung.

1. Es erscheint höchst wünschenswert, für die zulässigen linearen Schlussfehler bei geschlossenen Poligonzügen beliebiger Form über eine einfache, teoretisch begründete Formel zu verfügen.

2. Die Tabellen für Berechnung der zulässige Fehler der Längenmessungen sind für diesen Zweck schon deshalb unbrauchbar, weil sie den Einfluss der Fehlerquellen bei Ausmessung der Winkel nicht mit berücksichtigen.

3. In den für die Praxis der Landeinrichtung in S. S. S. R. üblichen Polygonen überwiegt der Einfluss von Fehlerquellen bei Ausmessung der Winkel auf den Nichtschluss im Perimeter sehr bedeutend den Einfluss der Fehlerquellen der linearen Vermessungen.

4. Die Formeln für zulässige Nichtschlüsse im Perimeter, welche von den Professoren F. N. Krassowsky und M. G. Michailow aufgestellt worden sind, und die teoretisch genau begründet sind, erscheinen viel zu komplicirt für ihre Anwendung in der Praxis, und werden daher wol kaum eine weitere Verbreitung in der Praxis finden.

5. Als Ergebniss einer teoretischen, durch Versuche bestätigten Erforschung schlage ich die nebenstehende Formel für begrenzte Werte bei Nichtschlüssen im Perimeter für geschlossene Poligonzüge vor.

a) für Oertlichkeiten I Klasse: $d_1=(3M_1)=0{,}01\sqrt{1{,}8P+0{,}00014(n+10)P^2}$ Mtr.

b) „ „ II „ $d_2=(3M_2)=0{,}01\sqrt{2{,}8P+0{,}00014(n+10)P^2}$ „

c) „ „ III “ $d_3=(3M_3)=0{,}01\sqrt{3{,}8P+0{,}00014(n+10)P^2}$ „

Hier sind P—der Perimeter des Polygons, n aber die Anzahl seiner Bruchpunkte.

Prof. P. A. Chodorowitsch.

Законности в строении планетной системы Солнца.

ВВЕДЕНИЕ.

14 августа 1918 года я обратился к директору Харьковской Университетской Астрономической Обсерватории профессору Н. Н. Евдокимову с большим по об‘ему письмом, вступительные строки которого были следующие:

„М. Г. Николай Николаевич, беру перо, чтобы сообщить Вам результаты исследования, которое я вел в последнее время. Так как моя специальность—физика, а упомянутое исследование относится к вопросу о законностях в строении планетной системы Солнца, т.-е. вопросу чисто астрономическому, то я считаю нужным прежде всего пояснить Вам, почему я занялся изучением его.

В моем лице Вы встречаете исследователя, много лет работавшего над изучением состояния немагнитного поля земли и тех изменений, которые оно получает в связи с суточным и годовым обращениями земного шара или в связи с действием причин непериодического характера. Так как эти строки обращены к Вам, то мне нет нужды вдаваться в раз‘яснение того, какое значение в физике и вообще в науке может иметь правильное решение этого вопроса. С самых разнообразных сторон он заключает в себе совершенно исключительный интерес, и я не сделаю никакого преувеличения, если скажу, что от успешного разрешения вопроса о характере и состояниях немагнитного поля земли в немалой степени зависят даже будущие завоевания в физике.

Вопрос, которым я занимался, представляет огромные трудности. Так как эта область явлений совсем не подвергалась изучению, мне пришлось прокладывать в ней первые пути, производя для этого массовые опыты и наблюдения. В конце концов мне удалось установить, что в направлениях меридиана и первого вертикала состояние среды в земном поле мы должны считать неодинаковым.

К сожалению, до наступления мировой войны мне удалось опубликовать лишь часть полученных мною материалов и при том в мало обработанном виде. Постигшая мое прежнее место жительства, город Ново-Александрию, военная катастрофа сделала то, что многие из этих материалов оказались даже утраченными. Что же касается уцелевших, то из-за затруднений, начавших охватывать нашу страну с лета 1915 года, они не могут дождаться опубликования до сих пор.

Оказавшись в Харькове, благодаря просвещенной помощи и содействию заведывавших физическим кабинетом Харьковского Технологического Института вначале А. М. Ильева, а позже профессора Ч. В. Речинского, я получил возможность не прерывать своих опытов и наблюдений· Считаю себя обязанным выразить им здесь за это мою глубокую признательность. Лишь этому содействию со стороны указанных лиц я обязан тем, что за сравнительно короткий промежуток времени мной был изучен новый путь для выяснения особенностей земного поля. Этот новый метод исследования позволил мне не только убедиться в правильности выводов, сделанных мною из прежних опытов и наблюдений, но и в значительной степени упростить приемы исследования. Убедиться в том, что немагнитное поле земли неоднородно и что оси этой неоднородности имеют направление, близкое к меридиану и первому вертикалу, теперь можно в течение очень небольшого числа минут. Черты явления здесь выражены настолько резко, что без труда могут быть демонстрированы в больших аудиториях.

Обдумывая результаты как прежних, так и последних по времени работ, я постепенно стал склоняться к мысли, что наблюдаемые мною явления необходимо рассматривать не только в связи с особенностями поля собственно земли, но и в связи со строением междупланетного пространства. На основании того, что мне приходилось наблюдать при помощи своих инструментов, мне стало казаться вероятным, что в строении солнечной системы имеются следы, которые могут привести нас к более глубокому уяснению основ строения этого участка мирового пространства. Не сомневаюсь, что высказанная мною в такой форме мысль Вам кажется чрезмерно смелой. Такой же казалась она на первых порах и мне. И не смотря на то, я решил сделать попытку разыскать подозреваемые следы. В этом и заключалась причина того, почему я принялся за изучение строения планетной системы Солнца.

Я не позволил бы себе утруждать Вас чтением настоящего моего письма, если бы не находил результатов, найденных мною в этой области, достойными внимания астрономов. Кроме того, берясь за перо, я руководился желанием сделать их возможно скорее известными хотя небольшой группе астрономов, чтобы они могли использовать их для астрономических целей. В тяжелых условиях переживаемого времени, когда сношение Харькова со всеми культурно-просветительными учреждениями мира совсем прекращено, такое желание мое, как нельзя более, законно. В виду этого я позволяю себе даже высказать надежду на то, что, по ознакомлении с содержанием этого письма, Вы не откажетесь сделать распоряжение о хранении его в делах заведываемой Вами Обсерватории, чтобы тем самым оградить от возможной утраты материалы, имеющие на мой взгляд значение в научном отношении“.

На этих словах обрывалась вводная часть моего письма и дальше следовало изложение самой сущности дела.

Вихрь политических событий, пронесшийся с 1918 года над Украиной, сделал то, что рукопись не сохранилась в архиве Обсерватории. По этой причине я считал ее погибшей и даже стал думать о восстановлении ее. Однако опасения мои оказались напрасными: не так давно рукопись была найдена и снова передана в Обсерваторию.

Приступая в настоящее время к печатанию вышеозначенной рукописи, считаю нужным отметить, что я сделал в ней существенные дополнения. Так, я снабдил ее главами I—VI, в которых излагаются математические обоснования тех классификаций, о которых будет идти речь ниже. Этих глав в начальной рукописи не было. Затем, мною значительно изменен текст заключительных глав рукописи и вычислены заново все коэффициенты формул, коими выражается связь между элементами планетных орбит. Таким образом мое исследование относительно законностей в строении планетной системы Солнца появляется теперь в печати в значительно дополненном и переработанном виде. Смею думать, что в таком виде мой труд дает читателю наиболее обоснованное и целостное представление о том поразительном механизме, который составляют взятые все вместе планеты солнечной системы.

После этих вступительных строк я приступаю к изложению существа вопроса.

ГЛАВА I.

В очень многих вопросах геофизики, метеорологии, астрономии и других наук приходится встречаться с периодической изменяемостью явлений и решать вопрос о величине периодов. До недавнего времени для определения этих периодов употребляли почти исключительно графический метод. Для этого вычерчивали по наблюдениям кривую и стремились или графически, или интерполированием определить эпохи максимумов и минимумов. Последовательные разности между ними и давали возможность вычислить периоды явления. Только сравнительно недавно Оппенгейм предложил [1]) для этой цели следующий аналитический прием.

Пусть дана периодическая функция вида

$$u = A_0 + A\sin\alpha t + B\cos\alpha t$$

Эту функцию можно рассматривать, как полный интеграл линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \alpha^2 (u - A_0) = 0\,,$$

решение которого относительно функции u дает

$$u = A_0 - \frac{1}{\alpha^2}\frac{d^2u}{dt^2}$$

Предположим, далее, что нам известно некоторое количество частных значений функции u, отвечающих последовательному ряду значений переменного $t_0,\ 2t_0,\ 3t_0, \ldots nt_0$.

Пусть эти значения будут: $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$. Если составим из них ряды разностей

$$u_2 - u_1 = \Delta u_1;\quad u_3 - u_2 = \Delta u_2;\ \ldots\ u_{n-1} - u_{n-2} = \Delta u_{n-2};\quad u_n - u_{n-1} = \Delta u_{n-1}$$

$$\Delta u_2 - \Delta u_1 = \Delta^2 u_1;\ \Delta u_3 - \Delta u_2 = \Delta^2 u_2; \ldots \Delta u_{n-2} - \Delta u_{n-3} = \Delta^2 u_{n-3};\ \Delta u_{n-1} - \Delta u_{n-2} = \Delta^2 u_{n-2}$$

$$\Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1 = \Delta^3 u_1;\ \Delta^2 u_3 - \Delta^2 u_2 = \Delta^3 u_2; \ldots \Delta^2 u_{n-3} - \Delta^2 u_{n-4} = \Delta^3 u_{n-4};\ \Delta^2 u_{n-2} - \Delta^2 u_{n-3} = \Delta^3 u_{n-2}$$

$$\Delta^3 u_2 - \Delta^3 u_1 = \Delta^4 u_1;\ \Delta^3 u_3 - \Delta^3 u_2 = \Delta^4 u_2; \ldots \Delta^3 u_{n-4} - \Delta^3 u_{n-5} = \Delta^4 u_{n-5};\ \Delta^3 u_{n-3} - \Delta^3 u_{n-4} = \Delta^4 u_{n-4}$$

и т. д.

и примем во внимание соотношения, устанавливаемые теорией конечных разностей для значения производных функции и ее конечных разностей, то найдем, что для каждого значения функции $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots u_n$ может быть вычислено соответствующее значение производной

$$\frac{d^2u_1}{dt^2},\ \frac{d^2u_2}{dt^2},\ \frac{d^2u_3}{dt^2} \ldots \frac{d^2u_n}{dt^2}$$

---

[1]) Oppenheim. Sitzungsberichte der Kaiser. Akad. der Wissenschaften zu Wien, Bd. CXVIII, Abth. IIa, S.823.

согласно равенствам:

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} = \Delta^2u_1 - \frac{1}{12}\Delta^4u_1 + \frac{1}{90}\Delta^6u_1 - \frac{1}{560}\Delta^8u_1 + \frac{1}{3150}\Delta^{10}u_1 - \ldots,$$

$$\frac{d^2u_2}{dt^2} = \Delta^2u_2 - \frac{1}{12}\Delta^4u_2 + \frac{1}{90}\Delta^6u_2 - \frac{1}{560}\Delta^8u_2 + \frac{1}{3150}\Delta^{10}u_2 - \ldots,$$

$$\frac{d^2u_3}{dt^2} = \Delta^2u_3 - \frac{1}{12}\Delta^4u_3 + \frac{1}{90}\Delta^6u_3 - \frac{1}{560}\Delta^8u_3 + \frac{1}{3150}\Delta^{10}u_3 - \ldots.$$

и т. д.

Отсюда видно, что всегда можно составить систему уравнений такого вида:

$$u_1 = A_0 - \frac{1}{\alpha^2}\frac{d^2u_1}{dt^2},$$

$$u_2 = A_0 - \frac{1}{\alpha^2}\frac{d^2u_2}{dt^2},$$

$$u_3 = A_0 - \frac{1}{\alpha^2}\frac{d^2u_3}{dt^2},$$

. . . .

. . . .

$$u_n = A_0 - \frac{1}{\alpha^2}\frac{d^2u_n}{dt^2},$$

где постоянные A_0 и α^2 играют роль неизвестных. Применяя к нахождению их способ наименьших квадратов, в конце концов получим наивероятнейшее значение искомого периода T из равенства

$$T = \frac{2\pi}{\alpha},$$

где π есть отношение окружности к диаметру.

Рассмотрим теперь более сложный случай. Пусть u есть функция двух периодов T_1 и T_2 так что

$$u = A_0 + A_1 \sin\alpha_1 t + B_1 \cos\alpha_1 t + A_2 \sin\alpha_2 t + B_2 \cos\alpha_2 t.$$

Если станем рассматривать ее, как полный интеграл дифференциального уравнения четвертого порядка

$$\frac{d^4u}{dt^4} + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\frac{d^2u}{dt^2} + \alpha_1^2\alpha_2^2(u - A_0) = 0,$$

то получим для нее выражение через производные второго и четвертого порядков в таком виде:

$$u = A_0 - \left(\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2}\right)\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{1}{\alpha_1^2\alpha_2^2}\frac{d^4u}{dt^4}.$$

Если вновь составим по известным частным значениям функции u ряды разностей и вычислим соответствующие им значения ее второй и четвертой производной согласно равенствам

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \Delta^2u - \frac{1}{12}\Delta^4u + \frac{1}{90}\Delta^6u - \frac{1}{560}\Delta^8u + \frac{1}{3150}\Delta^{10}u - \ .$$

$$\frac{d^4u}{dt^4} = \Delta^4u - \frac{1}{6}\Delta^6u + \frac{7}{240}\Delta^8u - \ . \ . \ .$$

то можем составить систему уравнений

$$u_1 = A_0 - \left(\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2}\right)\frac{d^2u_1}{dt^2} - \frac{1}{\alpha_1^2\alpha_2^2}\frac{d^4u_1}{dt^4}$$

$$u_2 = A_0 - \left(\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2}\right)\frac{d^2u_2}{dt^2} - \frac{1}{\alpha_1^2\alpha_2^2}\frac{d^4u_2}{dt^4}$$

. . . .

$$u_n = A_0 - \left(\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2}\right)\frac{d^2u_n}{dt^2} - \frac{1}{\alpha_1^2\alpha_2^2}\frac{d^4u_n}{dt^4}$$

в которых A_0 и коэффициенты при производных будут неизвестными. Определяя наивероятнейшее значение этих коэффициентов по методу наименьших квадратов и замечая, что составляющие их дроби $\frac{1}{\alpha_1^2}$ и $\frac{1}{\alpha_2^2}$ входят в таких комбинациях, как если бы они были корнями квадратного уравнения

$$x^2 - \left(\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2}\right)x + \frac{1}{\alpha_1^2\alpha_2^2} = 0 \ ,$$

решением последнего можем найти значение той и другой дроби в отдельности, а при помощи их найти, наконец, и значение искомых периодов T_1 и T_2 по формулам

$$T_1 = \frac{2\pi}{\alpha_1} \qquad T_2 = \frac{2\pi}{\alpha_2}$$

Легко понять, что если бы наша периодическая функция u была еще более сложной, например, содержала в себе члены, зависящие от трех, четырех или еще большего количества независимых друг от друга периодов, то, поступая согласно изложенным выше указаниям, можно было бы определить все искомые периоды, решая в конце концов некоторое уравнение четной или нечетной степени, корнями которого являются отыскиваемые величины.

Таков по своей сущности тот остроумный метод для нахождения неизвестных периодов, который был предложен в 1909 году Оппенгеймом. Как видно, вычисление искомых периодов ведется по этому способу легко и просто и, если бы не было необходимости считаться с тем, что в вычисления должны входить не точные, а только более или менее приближающиеся к точным значения производных функции u, то против метода ничего нельзя было бы возразить. Однако эта приближенность значений производных может оказаться весьма чувствительной, когда имеется ограниченное число наблюдений, препятствующее нахождению достаточного количества разностей высшего порядка. Понятно, что в этом случае метод Оппенгейма может иметь только относительное значение.

Я покажу теперь, как можно решить ту же задачу вполне точно.

ГЛАВА II.

Предположим, что нам дана периодическая функция u от нескольких независимых друг от друга периодов T_1, T_2, T_3, T_4, ... и пусть нам известны n частных значений ее: u_1, u_2, u_3, ... u_n, отвечающих значениям переменного t_0, $2t_0$, $3t_0$, ... nt_0. Согласно такому предположению найденные из наблюдений величины функции u могут быть представлены в следующем виде

$$
\begin{aligned}
u_1 &= A_0 + A_1 \sin \alpha_1 t_0 + A_2 \sin \alpha_2 t_0 + A_3 \sin \alpha_3 t_0 + \dots \\
&\quad + B_1 \cos \alpha_1 t_0 + B_2 \cos \alpha_2 t_0 + B_3 \cos \alpha_3 t_0 + \dots \\
u_2 &= A_0 + A_1 \sin 2\alpha_1 t_0 + A_2 \sin 2\alpha_2 t_0 + A_3 \sin 2\alpha_3 t_0 + \dots \\
&\quad + B_1 \cos 2\alpha_1 t_0 + B_2 \cos 2\alpha_2 t_0 + B_3 \cos 2\alpha_3 t_0 + \dots \\
u_3 &= A_0 + A_1 \sin 3\alpha_1 t_0 + A_2 \sin 3\alpha_2 t_0 + A_3 \sin 3\alpha_3 t_0 + \dots \\
&\quad + B_1 \cos 3\alpha_1 t_0 + B_2 \cos 3\alpha_2 t_0 + B_3 \cos 3\alpha_3 t_0 + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
u_n &= A_0 + A_1 \sin n\alpha_1 t_0 + A_2 \sin n\alpha_2 t_0 + A_3 \sin n\alpha_3 t_0 + \dots \\
&\quad + B_1 \cos n\alpha_1 t_0 + B_2 \cos n\alpha_2 t_0 + B_3 \cos n\alpha_3 t_0 + \dots
\end{aligned}
$$

Если преобразуем правые части этих уравнений, полагая

$$
\begin{array}{llll}
A_1 = C_1 \cos \varphi_1 & A_2 = C_2 \cos \varphi_2 & A_3 = C_3 \cos \varphi_3 & \\
B_1 = C_1 \sin \varphi_1 & B_2 = C_2 \sin \varphi_2 & B_3 = C_3 \sin \varphi_3 & \text{и т. д.}
\end{array}
$$

то им можно будет придать еще такой более простой вид

$$
\begin{aligned}
u_1 &= A_0 + C_1 \sin(\alpha_1 t_0 + \varphi_1) + C_2 \sin(\alpha_2 t_0 + \varphi_2) + C_3 \sin(\alpha_3 t_0 + \varphi_3) + \dots \\
u_2 &= A_0 + C_1 \sin(2\alpha_1 t_0 + \varphi_1) + C_2 \sin(2\alpha_2 t_0 + \varphi_2) + C_3 \sin(2\alpha_3 t_0 + \varphi_3) + \dots \\
u_3 &= A_0 + C_1 \sin(3\alpha_1 t_0 + \varphi_1) + C_2 \sin(3\alpha_2 t_0 + \varphi_2) + C_3 \sin(3\alpha_3 t_0 + \varphi_3) + \dots \qquad (1) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
u_n &= A_0 + C_1 \sin(n\alpha_1 t_0 + \varphi_1) + C_2 \sin(n\alpha_2 t_0 + \varphi_2) + C_3 \sin(n\alpha_3 t_0 + \varphi_3) + \dots
\end{aligned}
$$

С полученной системой уравнений произведем последовательно следующие операции. Прежде всего вычтем почленно из второго уравнения первое, из третьего второе, из четвертого третье и т. д. и, наконец, из n-ого (n—1)-ое, а затем из преобразованных посредством такой операции уравнений станем составлять новую систему уравнений, складывая эти уравнения в таком порядке: третье уравнение сложим с первым, четвертое с вторым, пятое с третьим и т. д. до последнего уравнения включительно. Результатом первой операции будут такие уравнения

$$
\begin{aligned}
\Delta u_1 = u_2 - u_1 &= 2C_1 \cos\left(\frac{3}{2}\alpha_1 t_0 + \varphi_1\right) \sin \frac{1}{2}\alpha_1 t_0 + \\
&+ 2C_2 \cos\left(\frac{3}{2}\alpha_2 t_0 + \varphi_2\right) \sin \frac{1}{2}\alpha_2 t_0 + 2C_3 \cos\left(\frac{3}{2}\alpha_3 t_0 + \varphi_2\right) \sin \frac{1}{2}\alpha_3 t_0 + \dots
\end{aligned}
$$

$$\Delta u_2 = u_3 - u_2 = 2C_1 \cos\left(\frac{5}{2}\alpha_1 t_0 + \varphi_1\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_1 t_0 +$$

$$+ 2C_2 \cos\left(\frac{5}{2}\alpha_2 t_0 + \varphi_2\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_2 t_0 + 2C_3 \cos\left(\frac{5}{2}\alpha_3 t_0 + \varphi_3\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_3 t_0 + \ldots$$

$$\Delta u_3 = u_4 - u_3 = 2C_1 \cos\left(\frac{7}{2}\alpha_1 t_0 + \varphi_1\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_1 t_0 +$$

$$+ 2C_2 \cos\left(\frac{7}{2}\alpha_2 t_0 + \varphi_2\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_2 t_0 + 2C_3 \cos\left(\frac{7}{2}\alpha_3 t_0 + \varphi_3\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_3 t_0 + \ldots$$

$$\Delta u_4 = u_5 - u_4 = 2C_1 \cos\left(\frac{9}{2}\alpha_1 t_0 + \varphi_1\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_1 t_0 +$$

$$+ 2C_2 \cos\left(\frac{9}{2}\alpha_2 t_0 + \varphi_2\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_2 t_0 + 2C_3 \cos\left(\frac{9}{2}\alpha_3 t_0 + \varphi_3\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_3 t_0 + \ldots$$

. . . .

$$\Delta u_{n-2} = u_{n-1} - u_{n-2} = 2C_1 \cos\left(\frac{2n-3}{2}\alpha_1 t_0 + \varphi_1\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_1 t_0 +$$

$$+ 2C_2 \cos\left(\frac{2n-3}{2}\alpha_2 t_0 + \varphi_2\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_2 t_0 + 2C_3 \cos\left(\frac{2n-3}{2}\alpha_3 t_0 + \varphi_3\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_3 t_0 + \ldots$$

$$\Delta u_{n-1} = u_n - u_{n-1} = 2C_1 \cos\left(\frac{2n-1}{2}\alpha_1 t_0 + \varphi_1\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_1 t_0 +$$

$$+ 2C_2 \cos\left(\frac{2n-1}{2}\alpha_2 t_0 + \varphi_2\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_2 t_0 + 2C_2 \cos\left(\frac{2n-1}{2}\alpha_3 t_0 + \varphi_3\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_3 t_0 + \ldots$$

а результатом второй—уравнения такого вида:

$$S_1 = \Delta u_3 + \Delta u_1 = 4C_1 \cos\left(\frac{5}{2}\alpha_1 t_0 + \varphi_1\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_1 t_0 \cos\alpha_1 t_0 +$$

$$+ 4C_2 \cos\left(\frac{5}{2}\alpha_2 t_0 + \varphi_2\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_2 t_0 \cos\alpha_2 t_0 + 4C_3 \cos\left(\frac{5}{2}\alpha_3 t_0 + \varphi_3\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_3 t_0 \cos\alpha_3 t_0 + \ldots$$

$$S_2 = \Delta u_4 + \Delta u_2 = 4C_1 \cos\left(\frac{7}{2}\alpha_1 t_0 + \varphi_1\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_1 t_0 \cos\alpha_1 t_0 +$$

$$+ 4C_2 \cos\left(\frac{7}{2}\alpha_2 t_0 + \varphi_2\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_2 t_0 \cos\alpha_2 t_0 + 4C_3 \cos\left(\frac{7}{2}\alpha_3 t_0 + \varphi_3\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_3 t_0 \cos\alpha_3 t_0 + \ldots$$

$$S_3 = \Delta u_5 + \Delta u_3 = 4C_1 \cos\left(\frac{9}{2}\alpha_1 t_0 + \varphi_1\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_1 t_0 \cos\alpha_1 t_0 +$$

$$+ 4C_2 \cos\left(\frac{9}{2}\alpha_2 t_0 + \varphi_2\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_2 t_0 \cos\alpha_2 t_0 + 4C_3 \cos\left(\frac{9}{2}\alpha_3 t_0 + \varphi_3\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_3 t_0 \cos\alpha_3 t_0 + \ldots$$

. . . .

$$S_{n-3} = \Delta u_{n-1} + \Delta u_{n-3} = 4C_1 \left(\frac{2n-3}{2}\alpha_1 t_0 + \varphi_1\right) \sin\frac{1}{2}\alpha_1 t_0 \cos\alpha_1 t_0 +$$

$$+ 4C_2 \cos\left(\frac{2n-3}{2}\alpha_2 t_0 + \varphi_2\right) \sin\frac{1}{2}\alpha_2 t_0 \cos\alpha_2 t_0 + 4C_3 \cos\left(\frac{2n-3}{2}\alpha_3 t_0 + \varphi_3\right) \sin\frac{1}{2}\alpha_3 t_0 \cos\alpha_3 t_0 + \ldots$$

Рассматривая полученные системы уравнений, видим, что всегда можно исключить из них один из членов правой части, например, первый, так как имеют место следующие соотношения:

$$P_1 = S_1 - 2\Delta u_2 \cos\alpha_1 t_0 = 4C_2 \cos\left(\frac{5}{2}\alpha_2 t_0 + \varphi_2\right) \sin\frac{1}{2}\alpha_2 t_0 \left(\cos\alpha_2 t_0 - \cos\alpha_1 t_0\right) +$$

$$+ 4C_3 \cos\left(\frac{5}{2}\alpha_3 t_0 + \varphi_3\right) \sin\frac{1}{2}\alpha_3 t_0 \left(\cos\alpha_3 t_0 - \cos\alpha_1 t_0\right) + \ldots \qquad (2)$$

$$P_2 = S_2 - 2\Delta u_3 \cos\alpha_1 t_0 = 4C_2 \cos\left(\frac{7}{2}\alpha_2 t_0 + \varphi_2\right) \sin\frac{1}{2}\alpha_2 t_0 \left(\cos\alpha_2 t_0 - \cos\alpha_1 t_0\right) +$$

$$+ 4C_3 \cos\left(\frac{7}{2}\alpha_3 t_0 + \varphi_3\right) \sin\frac{1}{2}\alpha_3 t_0 \left(\cos\alpha_3 t_0 - \cos\alpha_1 t_0\right) + \ldots$$

$$P_3 = S_3 - 2\Delta u_4 \cos\alpha_1 t_0 = 4C_2 \cos\left(\frac{9}{2}\alpha_2 t_0 + \varphi_2\right) \sin\frac{1}{2}\alpha_2 t_0 \left(\cos\alpha_2 t_0 - \cos\alpha_1 t_0\right) +$$

$$+ 4C_3 \cos\left(\frac{9}{2}\alpha_3 t_0 + \varphi_3\right) \sin\frac{1}{2}\alpha_3 t_0 \left(\cos\alpha_3 t_0 - \cos\alpha_1 t_0\right) + \ldots$$

. . . .

$$P_{n-3} = S_{n-3} - 2\Delta u_{n-2} \cos\alpha_1 t_0 = 4C_2 \left(\frac{2n-3}{2}\alpha_2 t_0 + \varphi_2\right) \sin\frac{1}{2}\alpha_2 t_0 \left(\cos\alpha_2 t_0 - \cos\alpha_1 t_0\right) +$$

$$+ 4C_3 \cos\left(\frac{2n-3}{2}\alpha_3 t_0 + \varphi_3\right) \sin\frac{1}{2}\alpha_3 t_0 \left(\cos\alpha_3 t_0 - \cos\alpha_1 t_0\right) + \ldots$$

Если с этими уравнениями поступим подобно предыдущему, то найдем, что

$$Q_1 = P_3 + P_1 - 2P_2 \cos\alpha_2 t_0 =$$

$$= 8C_3 \cos\left(\frac{7}{2}\alpha_3 t_0 + \varphi_3\right) \sin\frac{1}{2}\alpha_3 t_0 \left(\cos\alpha_3 t_0 - \cos\alpha_1 t_0\right)\left(\cos\alpha_3 t_0 - \cos\alpha_2 t_0\right) + \ldots$$

$$Q_2 = P_4 + P_2 - 2P_3 \cos\alpha_2 t_0 = \qquad (3)$$

$$= 8C_3 \cos\left(\frac{9}{2}\alpha_3 t_0 + \varphi_3\right) \sin\frac{1}{2}\alpha_3 t_0 \left(\cos\alpha_3 t_0 - \cos\alpha_1 t_0\right)\left(\cos\alpha_3 t_0 - \cos\alpha_2 t_0\right) + \ldots$$

$$Q_3 = P_5 + P_3 - 2P_4 \cos\alpha_2 t_0 =$$

$$= 8C_3 \cos\left(\frac{11}{2}\alpha_3 t_0 + \varphi_3\right) \sin\frac{1}{2}\alpha_3 t_0 \left(\cos\alpha_3 t_0 - \cos\alpha_1 t_0\right)\left(\cos\alpha_3 t_0 - \cos\alpha_3 t_0\right) + \ldots$$

. . . .

$$Q_{n-5} = P_{n-3} + P_{n-5} - 2P_{n-4}\cos\alpha_2 t_0 =$$

$$= 8C_3\cos\left(\frac{2n-5}{2}\alpha_3 t_0 + \varphi_3\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_3 t_0\left(\cos\alpha_3 t_0 - \cos\alpha_1 t_0\right)\left(\cos\alpha_3 t_0 - \cos\alpha_2 t_0\right) + \ldots$$

Поступая таким же способом далее, получим уравнения следующего вида

$$R_1 = Q_3 + Q_1 - 2Q_2\cos\alpha_3 t_0 =$$

$$=16C_4\cos\left(\frac{9}{2}\alpha_4 t_0 + \varphi_4\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_4 t_0\left(\cos\alpha_4 t_0 - \cos\alpha_1 t_0\right)\left(\cos\alpha_4 t_0 - \cos\alpha_2 t_0\right)\left(\cos\alpha_4 t_0 - \cos\alpha_3 t_0\right) + \ldots$$

$$R_2 = Q_4 + Q_2 - 2Q_3\cos\alpha_3 t_0 =$$

$$=16C_4\cos\left(\frac{11}{2}\alpha_4 t_0 + \varphi_4\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_4 t_0\left(\cos\alpha_4 t_0 - \cos\alpha_1 t_0\right)\left(\cos\alpha_4 t_0 - \cos\alpha_2 t_0\right)\left(\cos\alpha_4 t_0 - \cos\alpha_3 t_0\right) + \ldots$$

$$R_3 = Q_5 + Q_3 - 2Q_4\cos\alpha_3 t_0 = \tag{4}$$

$$=16C_4\cos\left(\frac{13}{2}\alpha_4 t_0 + \varphi_4\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_4 t_0\left(\cos\alpha_4 t_0 - \cos\alpha_1 t_0\right)\left(\cos\alpha_4 t_0 - \cos\alpha_2 t_0\right)\left(\cos\alpha_4 t_0 - \cos\alpha_3 t_0\right) + \ldots$$

. . . .

$$R_{n-7} = Q_{n-5} + Q_{n-7} - 2Q_{n-6}\cos\alpha_3 t_0 =$$

$$=16C_4\cos\left(\frac{2n-7}{2}\alpha_4 t_0 + \varphi_4\right)\sin\frac{1}{2}\alpha_4 t_0\left(\cos\alpha_4 t_0 - \cos\alpha_1 t_0\right)\left(\cos\alpha_4 t_0 - \cos\alpha_2 t_0\right)\left(\cos\alpha_3 t_0 - \cos\alpha_3 t_0\right) +$$

Таким образом мы убеждаемся в том, что, применяя последовательно прием преобразования уравнений, указанный в предыдущих строках, мы имеем возможность добиться того, чтобы в преобразованной системе уравнений правая часть их сделалась равной нулю. Пусть, например, наша функция u является функцией от четырех независимых друг от друга периодов. В таком случае очевидно, что такой системой уравнений будут уравнения

$$T_1 = R_3 + R_1 - 2R_2\cos\alpha_4 t_0 = 0$$

$$T_2 = R_4 + R_2 - 2R_3\cos\alpha_4 t_0 = 0$$

$$T_3 = R_5 + R_3 - 2R_4\cos\alpha_4 t_0 = 0 \tag{5}$$

. . . .

$$T_{n-9} = R_{n-7} + R_{n-9} - 2R_{n-8}\cos\alpha_4 t_0 = 0$$

Займемся преобразованием их.

Условимся обозначать разности значений функции u вида $(u_{k+1} - u_k)$ знаком Δu_k, так что пусть

$u_2 - u_1 = \Delta u_1 \qquad u_3 - u_2 = \Delta u_2 \qquad u_4 - u_3 = \Delta u_3 \quad \ldots \quad u_n - u_{n-1} = \Delta u_{n-1}$

а суммы, составленные из этих разностей, пусть будут равны

$$\begin{array}{llll}
\Delta u_3 + \Delta u_1 = S_1 & \Delta u_4 + \Delta u_2 = S_2 & \Delta u_5 + \Delta u_3 = S_3 \ldots & \Delta u_{n-1} + \Delta u_{n-3} = S_{n-3} \\
S_3 + S_1 = S_1^2 & S_4 + S_2 = S_2^2 & S_5 + S_3 = S_3^2 & S_{n-3} + S_{n-5} = S_{n-5}^2 \\
S_3^2 + S_1^2 = S_1^3 & S_4^2 + S_2^2 = S_2^3 & S_5^2 + S_3^2 = S_3^3 & S_{n-5}^2 + S_{n-7}^2 = S_{n-7}^3 \\
S_3^3 + S_1^3 = S_1^4 & S_4^3 + S_2^3 = S_2^4 & S_5^3 + S_3^3 = S_3^4 & S_{n-7}^3 + S_{n-9}^3 = S_{n-9}^4
\end{array}$$

Будем называть первый горизонтальный ряд сумм суммами первого порядка, второй ряд—суммами второго порядка, третий ряд—суммами третьего порядка и, наконец, последний ряд—суммами четвертого порядка. Введя такое обозначение, найдем, что любая из функций P_k, Q_k, $R_k \ldots$ может быть легко выражена через разности Δu и суммы S согласно формулам

$$P_k = S_k - 2\Delta u_{k+1} \cos \alpha_1 t_0$$

$$Q_k = S_k^2 - 2 S_{k+1}(\cos \alpha_1 t_0 + \cos \alpha_2 t_0) + 2^2 \Delta u_{k+2} \cos \alpha_1 t_0 \cos \alpha_2 t_0 \tag{6}$$

$$R_k = S_k^3 - 2 S_{k+1}^2 (\cos \alpha_1 t_0 + \cos \alpha_2 t_0 + \cos \alpha_3 t_0) + 2^2 S_{k+2} (\cos \alpha_1 t_0 \cos \alpha_2 t_0 +$$

$$+ \cos \alpha_1 t_0 \cos \alpha_3 t_0 + \cos \alpha_2 t_0 \cos \alpha_3 t_0) - 2^3 \Delta u_{k+3} \cos \alpha_1 t_0 \cos \alpha_2 t_0 \cos \alpha_3 t_0$$

Принимая это во внимание, найдем, что и функция T_k выразится после подстановки в нее значений R_{k+2}, R_{k+1} и R_k равенством подобного же вида, а именно:

$$T_k = S_k^4 - 2S_{k+1}^3 (\cos \alpha_1 t_0 + \cos \alpha_2 t_0 + \cos \alpha_3 t_0 + \cos \alpha_4 t_0) + \tag{7}$$

$$+ 2^2 S_{k+2}^2 (\cos \alpha_1 t_0 \cos \alpha_2 t_0 + \cos \alpha_1 t_0 \cos \alpha_3 t_0 + \cos \alpha_1 t_0 \cos \alpha_4 t_0 + \ldots + \cos \alpha_3 t_0 \cos \alpha_4 t_0) -$$

$$- 2^3 S_{k+3} (\cos \alpha_1 t_0 \cos \alpha_2 t_0 \cos \alpha_3 t_0 + \ldots + \cos \alpha_2 t_0 \cos \alpha_3 t_0 \cos \alpha_4 t_0) +$$

$$+ 2^4 \Delta u_{k+4} \cos \alpha_1 t_0 \cos \alpha_2 t_0 \cos \alpha_3 t_0 \cos \alpha_4 t_0$$

Таким образом нахождение неизвестных периодов из наблюдений приводится прежде всего к решению уравнений вида $P_k = 0$; $Q_k = 0$; $R_k = 0$ или $T_k = 0$..., смотря потому, функцией от какого числа независимых периодов мы рассматриваем нашу функцию u. Все они составлены по одному плану, а именно: они заключают в себе в качестве коэффициентов при суммах разного порядка суммы всех возможных сочетаний из $\cos \alpha_1 t_0$, $\cos \alpha_2 t_0$, $\cos \alpha_3 t_0$, $\cos \alpha_4 t_0, \ldots$ по одному, по два, по три, по четыре и т. д., которые и могут быть рассматриваемы за неизвестные. Так как этих уравнений может оказаться больше числа неизвестных, то к решению их придется применить метод наименьших квадратов и таким способом будет получено наивероятнейшее значение этих неизвестных. После того можно будет приступить к нахождению значений каждого отдельного косинуса. А это сделать будет легко, так как комбинации, составленные из косинусов, совершенно такие же, как комбинации из корней уравнения степени, равной числу неизвестных косинусов. Поэтому, например, в случае четырех неизвестных периодов, полагая

$$\begin{gathered}\cos\alpha_1 t_0 + \cos\alpha_2 t_0 + \cos\alpha_3 t_0 + \cos\alpha_4 t_0 = p \\ \cos\alpha_1 t_0 \cos\alpha_2 t_0 + \cos\alpha_1 t_0 \cos\alpha_3 t_0 + \ldots + \cos\alpha_3 t_0 \cos\alpha_4 t_0 = q \\ \cos\alpha_1 t_0 \cos\alpha_2 t_0 \cos\alpha_3 t_0 + \ldots + \cos\alpha_2 t_0 \cos\alpha_3 t_0 \cos\alpha_4 t_0 = r \\ \cos\alpha_1 t_0 \cos\alpha_2 t_0 \cos\alpha_3 t_0 \cos\alpha_4 t_0 = s\end{gathered} \tag{8}$$

получим значение каждого отдельного косинуса, решая уравнение 4-ой степени

$$\cos^4 x - p\cos^3 x + q\cos^2 x - r\cos x + s = 0. \tag{9}$$

Когда будут найдены значения косинусов, то неизвестные периоды определятся из равенств

$$T_1 = \frac{2\pi}{\alpha_1} \qquad T_2 = \frac{2\pi}{\alpha_2} \qquad T_3 = \frac{2\pi}{\alpha_3} \qquad T_4 = \frac{2\pi}{\alpha_4}$$

Сравнивая изложенный метод нахождения из наблюдений неизвестных периодов с методом Оппенгейма, можно видеть, что от самого начала и до конца вычисление ведется здесь с помощью подлинных наблюдений и в начальную систему уравнений не вводится ни один коэффициент с приближенным значением, как это имеет место в методе Оппенгейма. Затем немаловажное значение имеет и то обстоятельство, что количество наблюдений, необходимых для нахождения неизвестных периодов, здесь значительно понижается. Так например, имея 13 наблюдений, имеем возможность найти по изложенному в этой главе методу точное значение четырех неизвестных периодов, чего нельзя достигнуть по методу Оппенгейма. Вычисленные по этому способу периоды оказались бы неточными.

ГЛАВА III.

Проделав вычисления согласно вышеизложенной схеме, мы можем найти точное значение всех неизвестных периодов, если число уранений (1) у нас будет равну числу всех неизвестных, входящих в эти уравнения, или же наивероятнейшее значение их, если число этих уравнений будет больше числа всех неизвестных. Чтобы задачу нашу можно было считать окончательно решенной, остается показать, как можно найти значение коэффициентов $A_0, A_1, A_2, \ldots A_k$ и фаз $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_k$.

Последовательное исключение периодических членов, входящих в уравнения (1), мы можем произвести иначе. Условимся обозначать

$$\begin{array}{llll} u_3 + u_1 = \Sigma_1 & u_4 + u_2 = \Sigma_2 & u_5 + u_3 = \Sigma_3 & u_n + u_{n-2} = \Sigma_{n-2} \\ \Sigma_3 + \Sigma_1 = \Sigma^2_1 & \Sigma_4 + \Sigma_2 = \Sigma^2_2 & \Sigma_5 + \Sigma_3 = \Sigma^2_3 & \Sigma_{n-2} + \Sigma_{n-4} = \Sigma^2_{n-4} \\ \Sigma^2_3 + \Sigma^2_1 = \Sigma^3_1 & \Sigma^2_4 + \Sigma^2_2 = \Sigma^3_2 & \Sigma^2_5 + \Sigma^2_3 = \Sigma^3_3 & \Sigma^2_{n-4} + \Sigma^2_{n-6} = \Sigma^3_{n-6} \end{array}$$

и т д.

С другой стороны, пусть будут равны

$$u_3 - u_1 = D_1 \qquad u_4 - u_2 = D_2 \qquad u_5 - u_3 = D_3 \qquad u_n - u_{n-2} = D_{n-2}$$

$$D_3 + D_1 = \Theta_1 \qquad D_4 + D_2 = \Theta_2 \qquad D_5 + D_3 = \Theta_3 \qquad D_{n-2} + D_{n-4} = \Theta_{n-4}$$

$$\Theta_3 + \Theta_1 = \Theta_1^2 \qquad \Theta_4 + \Theta_2 = \Theta_2^2 \qquad \Theta_5 + \Theta_3 = \Theta_2^3 \qquad \Theta_{n-4} + \Theta_{n-6} = \Theta_{n-6}^2$$

и т. д.

Составляя суммы Σ, мы, очевидно, будем иметь

$$\Sigma_1 = 2A_0 + 2A_1 \cos\alpha_1 t_0 \sin(2\alpha_1 t_0 + \varphi_1) +$$

$$+ 2A_2 \cos\alpha_2 t_0 \sin(2\alpha_2 t_0 + \varphi_2) + \ . \ . \ . + 2A_k \cos\alpha_k t_0 \sin(2\alpha_k t_0 + \varphi_k)$$

$$\Sigma_2 = 2A_0 + 2A_1 \cos\alpha_1 t_0 \sin(3\alpha_1 t_0 + \varphi_1) +$$

$$+ 2A_2 \cos\alpha_2 t_0 \sin(3\alpha_2 t_0 + \varphi_2) + \ . \ . \ . + 2A_k \cos\alpha_k t_0 \sin(3\alpha_k t_0 + \varphi_k)$$

. . . .

$$\Sigma_{n-2} = 2A_0 + 2A_1 \cos\alpha_1 t_0 \sin\Big((n-1)\alpha_1 t_0 + \varphi_1\Big) +$$

$$+ 2A_2 \cos\alpha_2 t_0 \sin\Big((n-1)\alpha_2 t_0 + \varphi_2\Big) + ... + 2A_k \cos\alpha_k t_0 \sin\Big((n-1)\alpha_k t_0 + \varphi_k\Big)$$

Так как какое угодно u_{p+1} равно

$$u_{p+1} = A_0 + A_1 \sin\Big((\rho+1)\alpha_1 t_0 + \varphi_1\Big) +$$

$$+ A_2 \sin\Big((\rho+1)\alpha_2 t_0 + \varphi_2\Big) + \ . \ . \ . + A_k \sin\Big((\rho+1)\alpha_k t_0 + \varphi_k\Big)$$

а

$$\Sigma_p = 2A_0 + 2A_1 \cos\alpha_1 t_0 \sin\Big((\rho+1)\alpha_1 t_0 + \varphi_1\Big) + ... + 2A_k \cos\alpha_k t_0 \sin\Big((\rho+1)\alpha_k t_0 + \varphi_k\Big)$$

то, вычитая из Σ_p удвоенное $u_{p+1} \cos\alpha_1 t_0$ будем иметь выражение, свободное от члена $2A_1 \cos\alpha_1 t_0 \sin\Big((\rho+1)\alpha_1 t_0 + \varphi_1\Big)$. Давая значку ρ значения последовательно 1, 2, 3, 4..., будем иметь такие уравнения:

$$\rho'_1 = \Sigma_1 - 2u_2 \cos\alpha_1 t_0 = 2A_0(1 - \cos\alpha_1 t_0) +$$

$$+ 2A_2(\cos\alpha_2 t_0 - \cos\alpha_1 t_0)\sin(2\alpha_2 t_0 + \varphi_2) + ... + 2A_k(\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_1 t_0)\sin(2\alpha_k t_0 + \varphi_k)$$

$$\rho'_2 = \Sigma_2 - 2u_3 \cos\alpha_1 t_0 = 2A_0(1 - \cos\alpha_1 t_0) + \qquad (2_a)$$

$$+ 2A_2(\cos\alpha_2 t_0 - \cos\alpha_1 t_0)\sin(3\alpha_2 t_0 + \varphi_2) + ... + 2A_k(\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_1 t_0)\sin(3\alpha_k t_0 + \varphi_k)$$

$$\rho'_3 = \Sigma_3 - 2u_4 \cos\alpha_1 t_0 = 2A_0(1 - \cos\alpha_1 t_0) +$$

$$+ 2A_2(\cos\alpha_2 t_0 - \cos\alpha_1 t_0)\sin(4\alpha_2 t_0 + \varphi_2) + ... + 2A_k(\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_1 t_0)\sin(4\alpha_k t_0 + \varphi_k)$$

и т. д.

Легко убедиться, что, если мы станем составлять подобные предыдущим выражения вида $Q'_p = \rho'_\rho + \rho'_{\rho+2} - 2\rho'_{\rho+1} \cos\alpha_2 t_0$, то найдем, чт, они будут свободны от члена $4A_2(\cos\alpha_2 t_0 - \cos\alpha_1 t_0)\sin\Big((\rho+2)\alpha_2 t_0 + \varphi_2\Big)$

С другой стороны, пусть будут равны

$$\begin{array}{llll} u_3 - u_1 = D_1 & u_4 - u_2 = D_2 & u_5 - u_3 = D_3 & u_n - u_{n-2} = D_{n-2} \\ D_3 + D_1 = \Theta_1 & D_4 + D_2 = \Theta_2 & D_5 + D_3 = \Theta_3 & D_{n-2} + D_{n-4} = \Theta_{n-4} \\ \Theta_3 + \Theta_1 = \Theta_1^2 & \Theta_4 + \Theta_2 = \Theta_2^2 & \Theta_5 + \Theta_3 = \Theta_2^3 & \Theta_{n-4} + \Theta_{n-6} = \Theta_{n-6}^2 \end{array}$$

и т. д.

Составляя суммы Σ, мы, очевидно, будем иметь

$$\Sigma_1 = 2 A_0 + 2 A_1 \cos \alpha_1 t_0 \sin (2 \alpha_1 t_0 + \varphi_1) +$$

$$+ 2 A_2 \cos \alpha_2 t_0 \sin (2 \alpha_2 t_0 + \varphi_2) + \ldots + 2 A_k \cos \alpha_k t_0 \sin (2 \alpha_k t_0 + \varphi_k)$$

$$\Sigma_2 = 2 A_0 + 2 A_1 \cos \alpha_1 t_0 \sin (3 \alpha_1 t_0 + \varphi_1) +$$

$$+ 2 A_2 \cos \alpha_2 t_0 \sin (3 \alpha_2 t_0 + \varphi_2) + \ldots + 2 A_k \cos \alpha_k t_0 \sin (3 \alpha_k t_0 + \varphi_k)$$

. . . .

$$\Sigma_{n-2} = 2 A_0 + 2 A_1 \cos \alpha_1 t_0 \sin \Big((n-1) \alpha_1 t_0 + \varphi_1\Big) +$$

$$+ 2 A_2 \cos \alpha_2 t_0 \sin \Big((n-1) \alpha_2 t_0 + \varphi_2\Big) + \ldots + 2 A_k \cos \alpha_k t_0 \sin \Big((n-1) \alpha_k t_0 + \varphi_k\Big)$$

Так как какое угодно u_{p+1} равно

$$u_{p+1} = A_0 + A_1 \sin \Big((\rho + 1) \alpha_1 t_0 + \varphi_1\Big) +$$

$$+ A_2 \sin \Big((\rho + 1) \alpha_2 t_0 + \varphi_2\Big) + \ldots + A_k \sin \Big((\rho + 1) \alpha_k t_0 + \varphi_k\Big)$$

а

$$\Sigma_p = 2A_0 + 2A_1 \cos\alpha_1 t_0 \sin\Big((\rho+1)\alpha_1 t_0 + \varphi_1\Big) + \ldots + 2A_k \cos\alpha_k t_0 \sin\Big((\rho+1)\alpha_k t_0 + \varphi_k\Big)$$

то, вычитая из Σ_p удвоенное $u_{p+1} \cos \alpha_1 t_0$ будем иметь выражение, свободное от члена $2A_1 \cos \alpha_1 t_0 \sin \Big((\rho + 1) \alpha_1 t_0 + \varphi_1\Big)$. Давая значку ρ значения последовательно 1, 2, 3, 4..., будем иметь такие уравнения:

$$\rho'_1 = \Sigma_1 - 2 u_2 \cos \alpha_1 t_0 = 2 A_0 (1 - \cos \alpha_1 t_0) +$$

$$+ 2A_2 (\cos\alpha_2 t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \sin(2\alpha_2 t_0 + \varphi_2) + \ldots + 2A_k (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \sin(2\alpha_k t_0 + \varphi_k)$$

$$\rho'_2 = \Sigma_2 - 2 u_3 \cos \alpha_1 t_0 = 2 A_0 (1 - \cos \alpha_1 t_0) + \qquad (2_a)$$

$$+ 2A_2 (\cos\alpha_2 t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \sin(3\alpha_2 t_0 + \varphi_2) + \ldots + 2A_k (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \sin(3\alpha_k t_0 + \varphi_k)$$

$$\rho'_3 = \Sigma_3 - 2 u_4 \cos \alpha_1 t_0 = 2 A_0 (1 - \cos \alpha_1 t_0) +$$

$$+ 2A_2 (\cos\alpha_2 t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \sin(4\alpha_2 t_0 + \varphi_2) + \ldots + 2A_k (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \sin(4\alpha_k t_0 + \varphi_k)$$

и т. д.

Легко убедиться, что, если мы станем составлять подобные предыдущим выражения вида $Q'_p = \rho'_\rho + \rho'_{\rho+2} - 2 \rho'_{\rho+1} \cos \alpha_2 t_0$, то найдем, чт, они будут свободны от члена $4A_2 (\cos \alpha_2 t_0 - \cos \alpha_1 t_0) \sin \Big((\rho + 2) \alpha_2 t_0 + \varphi_2\Big)$

потому что все они будут писаться так:

$$Q'_1 = P'_1 + P'_3 - 2P'_2 \cos\alpha_2 t_0 = 4A_0(1 - \cos\alpha_1 t_0)(1 - \cos\alpha_2 t_0) +$$
$$+ 4A_3(\cos\alpha_3 t_0 - \cos\alpha_1 t_0)(\cos\alpha_3 t_0 - \cos\alpha_2 t_0)\sin(3\alpha_3 t_0 + \varphi_3) + \ldots$$
$$Q'_2 = P'_2 + P'_4 - 2P'_3 \cos\alpha_2 t_0 = 4A_0(1 - \cos\alpha_1 t_0)(1 - \cos\alpha_2 t_0) +$$
$$+ 4A_3(\cos\alpha_3 t_0 - \cos\alpha_1 t_0)(\cos\alpha_3 t_0 - \cos\alpha_2 t_0)\sin(4\alpha_3 t_0 + \varphi_3) + \ldots$$
$$Q'_3 = P'_3 + P'_5 - 2P'_4 \cos\alpha_2 t_0 = 4A_0(1 - \cos\alpha_1 t_0)(1 - \cos\alpha_2 t_0) +$$
$$+ 4A_3(\cos\alpha_3 t_0 - \cos\alpha_1 t_0)(\cos\alpha_3 t_0 - \cos\alpha_2 t_0)\sin(5\alpha_3 t_0 + \varphi_3) + \ldots$$

и д. т.

Подобным же образом найдем, что

$$R'_1 = Q'_1 + Q'_3 - 2Q'_2 \cos\alpha_3 t_0 = 8A_0(1 - \cos\alpha_1 t_0)(1 - \cos\alpha_2 t_0)(1 - \cos\alpha_3 t_0) +$$
$$+ 8A_4(\cos\alpha_4 t_0 - \cos\alpha_1 t_0)(\cos\alpha_4 t_0 - \cos\alpha_2 t_0)(\cos\alpha_4 t_0 - \cos\alpha_3 t_0)\sin(4\alpha_4 t_0 + \varphi_4) + \ldots$$
$$R'_2 = Q'_2 + Q'_4 - 2Q'_3 \cos\alpha_3 t_0 = 8A_0(1 - \cos\alpha_1 t_0)(1 - \cos\alpha_2 t_0)(1 - \cos\alpha_3 t_0) +$$
$$+ 8A_4(\cos\alpha_4 t_0 - \cos\alpha_1 t_0)(\cos\alpha_4 t_0 - \cos\alpha_2 t_0)(\cos\alpha_4 t_0 - \cos\alpha_3 t_0)\sin(5\alpha_4 t_0 + \varphi_4) + \ldots$$
$$R'_3 = Q'_3 + Q'_5 - 2Q'_4 \cos\alpha_3 t_0 = 8A_0(1 - \cos\alpha_1 t_0)(1 - \cos\alpha_2 t_0)(1 - \cos\alpha_3 t_0) +$$
$$+ 8A_4(\cos\alpha_4 t_0 - \cos\alpha_1 t_0)(\cos\alpha_4 t_0 - \cos\alpha_2 t_0)(\cos\alpha_4 t_0 - \cos\alpha_3 t_0)\sin(6\alpha_4 t_0 + \varphi_4) + \ldots$$

и т. д.

а также

$$T'_1 = R'_1 + R'_3 - 2R'_2 \cos\alpha_4 t_0 = 16A_0(1 - \cos\alpha_1 t_0)(1 - \cos\alpha_2 t_0)(1 - \cos\alpha_3 t_0)(1 - \cos\alpha_4 t_0) +$$
$$+ 16A_5(\cos\alpha_5 t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \;.\;.\;.\; (\cos\alpha_5 t_0 - \cos\alpha_4 t_0)\sin(5\alpha_5 t_0 + \varphi_5) + \ldots$$
$$T'_2 = R'_2 + R'_4 - 2R'_3 \cos\alpha_4 t_0 = 16A_0(1 - \cos\alpha_1 t_0)(1 - \cos\alpha_2 t_0)(1 - \cos\alpha_3 t_0)(1 - \cos\alpha_4 t_0) +$$
$$+ 16A_5(\cos\alpha_5 t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \;.\;.\;.\; (\cos\alpha_5 t_0 - \cos\alpha_4 t_0)\sin(6\alpha_5 t_0 + \varphi_5) + \ldots$$
$$T'_3 = R'_3 + R'_5 - 2R'_4 \cos\alpha_4 t_0 = 16A_0(1 - \cos\alpha_1 t_0)(1 - \cos\alpha_2 t_0)(1 - \cos\alpha_3 t_0)(1 - \cos\alpha_4 t_0) +$$
$$+ 16A_5(\cos\alpha_5 t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \;.\;.\;.\; (\cos\alpha_5 t_0 - \cos\alpha_4 t_0)\sin(7\alpha_5 t_0 + \varphi_5) + \ldots$$

и т. д.

Таким образом, как бы ни было велико число периодических членов в системе уравнений (1), мы всетаки всегда можем их исключить и получить такие уравнения, в которых будет оставаться в качестве неизвестного только постоянное A_0. Пусть эти уравнения будут

$$W'_1 + W'_3 - 2W'_2 \cos\alpha_k t_0 = 2^k A_0(1 - \cos\alpha_1 t_0)(1 - \cos\alpha_2 t_0) \;.\;.\;.\; (1 - \cos\alpha_k t_0)$$
$$W'_2 + W'_4 - 2W'_3 \cos\alpha_k t_0 = 2^k A_0(1 - \cos\alpha_1 t_0)(1 - \cos\alpha_2 t_0) \;.\;.\;.\; (1 - \cos\alpha_k t_0)$$
$$W'_3 + W'_5 - 2W'_4 \cos\alpha_k t_0 = 2^k A_0(1 - \cos\alpha_1 t_0)(1 - \cos\alpha_2 t_0) \;.\;.\;.\; (1 - \cos\alpha_k t_0)$$

и т. д.

Так как в этих уравнениях периоды мы можем считать известными, а выражения W являются функциями только от наблюденных величин $u_1, u_2\ u_3, \ldots u_n$ и этих же периодов, то очевидно, что любое из них нам может служить для определения числового значения постоянного A_0. Развертывая в строку выражение $W_p + W'_{p+2} - 2W'_{p+1} \cos \alpha_k t_0$ и делая таким образом явной зависимость его от периодов и наблюденных величин, найдем равенства такого вида

$$\Sigma_p^k - 2q_1 \Sigma_{p+1}^{k-1} + 2q_2 \Sigma_{p+2}^{k-2} - 2q_3 \Sigma_{p+3}^{k-3} + \ldots \pm 2q_{k-1}\ \Sigma_{p+k-1} \mp 2q_k\, u_{p+k} =$$
$$= 2^k A_0 (1 - q_1 + q_2 - q_3 + \ldots q_k) \tag{11}$$

где под буквами $q_1, q_2, q_3, \ldots q_k$ мы должны подразумевать числовое значение следующих выражений

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \cos \alpha_1 t_0 + \cos \alpha_2\, t_0 + \cos \alpha_3\, t_0 + \ldots + \cos \alpha_k\, t_0 \\ q_2 &= \cos \alpha_1\, t_0 \cos \alpha_2\, t_0 + \cos \alpha_1\, t_0 \cos \alpha_3\, t_0 + \ldots + \cos \alpha_{k-1}\, t_0 \cos \alpha_k\, t_0 \\ q_3 &= \cos \alpha_1\, t_0 \cos \alpha_2\, t_0 \cos \alpha_3\, t_0 + \cos \alpha_1 t_0 \cos \alpha_2 t_0 \cos \alpha_4 t_0 + \ldots \\ &\quad + \cos \alpha_{k-2}\, t_0 \cos \alpha_{k-1}\, t_0 \cos \alpha_k\, t_0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_k &= \cos \alpha_1\, t_0 \cos \alpha_2 t_0 \cos \alpha_3 t_0 \cos \alpha_4\, t_0 \ldots \cos \alpha_k t_0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

а $1 - q_1 + q_2 - q_3 + \ldots + q_k$ заменяет собою произведение

$$(1 - \cos \alpha_1\, t_0)\,(1 - \cos \alpha_2\, t_0) \ldots (1 - \cos \alpha_k\, t_0).$$

Само собою разумеется, что, если в системе уравнений (1) число уравнений будет больше числа всех неизвестных, то, находя неизвестное A_0 из разных уравнений типа (11), мы будем получать для него разные значения. Поэтому необходимо сложить все уравнения типа (11) и определять A_0 из получающегося таким способом одного уравнения. В этом случае определенное из такого уравнения числовое значение постоянного A_0 будет наивероятнейшим.

Подготовим теперь уравнения, при помощи которых можно точно определить какую угодно из амплитуд $A_1, A_2, A_3, \ldots A_k$ и фаз $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_k$. Для этого займемся нахождением выражений для разностей D и сумм Θ. Находя по уравнениям (1) разности $(u_3 - u_1)$, $(u_4 - u_2)$, $(u_5 - u_3), \ldots$, мы получим такие равенства:

$$u_3 - u_1 = D_1 = 2A_1 \sin \alpha_1\, t_0 \cos(2\alpha_1 t_0 + \varphi_1) + 2A_2 \sin \alpha_2 t_0 \cos(2\alpha_2 t_0 + \varphi_2) + \ldots$$
$$+ 2A_k \sin \alpha_k\ t_0 \cos(2\alpha_k\, t_0 + \varphi_k)$$

$$u_4 - u_2 = D_2 = 2A_1 \sin \alpha_1 t_0 \cos(3\alpha_1\, t_0 + \varphi_1) + 2A_2 \sin \alpha_2 t_0 \cos(3\alpha_2 t_0 + \varphi_2) + \ldots$$
$$+ 2A_k \sin \alpha_k\, t_0 \cos(3\alpha_k\, t_0 + \varphi_k)$$

$$u_5 - u_3 = D_3 = 2A_1 \sin \alpha_1\, t_0 \cos(4\alpha_1\, t_0 + \varphi_1) + 2A_2 \sin \alpha_2\, t_0 \cos(4\alpha_2\, t_0 + \varphi_2) + \ldots$$
$$+ 2A_k \sin \alpha_k\, t_0 \cos(4\alpha_k\, t_0 + \varphi_k)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_n - u_{n-2} = D_{n-2} = 2A_1 \sin \alpha_1 t_0 \cos\Big((n-1)\alpha_1 t_0 + \varphi_1\Big) + 2A_2 \sin \alpha_2 t_0 \cos\Big((n-1)\alpha_2 t_0 + \varphi_2\Big) + \ldots$$
$$+ 2A_k \sin \alpha_k\, t_0 \cos\Big((n-1)\alpha_k\, t_0 + \varphi_k\Big)$$

откуда

$$\Theta_1 = D_1 + D_3 = 4A_1 \sin\alpha_1 t_0 \cos\alpha_1 t_0 \cos(3\alpha_1 t_0 + \varphi_1) + \ldots$$
$$+ 4A_k \sin\alpha_k t_0 \cos\alpha_k t_0 \cos(3\alpha_k t_0 + \varphi_k)$$

$$\Theta_2 = D_2 + D_4 = 4A_1 \sin\alpha_1 t_0 \cos\alpha_1 t_0 \cos(4\alpha_1 t_0 + \varphi_1) + \ldots$$
$$+ 4A_k \sin\alpha_k t_0 \cos\alpha_k t_0 \cos(4\alpha_k t_0 + \varphi_k)$$

$$\Theta_3 = D_3 + D_5 = 4A_1 \sin\alpha_1 t_0 \cos\alpha_1 t_0 \cos(5\alpha_1 t_0 + \varphi_1) + \ldots$$
$$+ 4A_k \sin\alpha_k t_0 \cos\alpha_k t_0 \cos(5\alpha_k t_0 + \varphi_k)$$

и т. д.

Из последней серии равенств получается

$$P''_1 = \Theta_1 - 2D_2 \cos\alpha_1 t_0 = 4A_2 \sin\alpha_2 t_0 (\cos\alpha_2 t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \cos(3\alpha_2 t_0 + \varphi_2) + \ldots$$
$$+ 4A_k \sin\alpha_k t_0 (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \cos(3\alpha_k t_0 + \varphi_k)$$

$$P''_2 = \Theta_2 - 2D_3 \cos\alpha_1 t_0 = 4A_2 \sin\alpha_2 t_0 (\cos\alpha_2 t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \cos(4\alpha_2 t_0 + \varphi_2) + \ldots$$
$$+ 4A_k \sin\alpha_k t_0 (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \cos(4\alpha_k t_0 + \varphi_k) \qquad (13)$$

$$P''_3 = \Theta_3 - 2D_4 \cos\alpha_1 t_0 = 4A_2 \sin\alpha_2 t_0 (\cos\alpha_2 t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \cos(5\alpha_2 t_0 + \varphi_2) + \ldots$$
$$+ 4A_k \sin\alpha_k t_0 (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \cos(5\alpha_k t_0 + \varphi_k)$$

и т. д.

т.-е. получаются такие равенства, в которых совершенно отсутствует периодический член с постоянными A_1, α_1, φ_1.

Продолжая исключать периодические члены таким же путем, как выше, составляя для этого последовательно выражения вида

$$Q''_\rho = P''_\rho + P''_{\rho+2} - 2P''_{\rho+1} \cos\alpha_2 t_0$$

$$R''_\rho = Q''_\rho + Q''_{\rho+2} - 2Q''_{\rho+1} \cos\alpha_3 t_0 \qquad (14)$$

$$T''_\rho = R''_\rho + R''_{\rho+2} - 2R''_{\rho+1} \cos\alpha_4 t_0$$

и т. д.

мы дойдем в конце концов до таких уравнений, в правой части которых будет находиться член, зависящий только от A_k, α_k и φ_k. На них и остановимся. Развернутые в строку, эти уравнения будут иметь такой вид:

$$\Theta^{k-1}_\rho - 2q'_1 \Theta^{k-2}_{\rho+1} + 2^2 q'_2 \Theta^{k-3}_{\rho+2} - 2^3 q'_3 \Theta^{k-4}_{\rho+3} + \ldots \pm 2^{k-1} q'_{k-1} D_{\rho+k-1} = \qquad (15)$$
$$= 2^k A_k \sin\alpha_k t_0 (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \ldots (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_{k-1} t_0) \cos\Big((\rho+k)\alpha_k t_0 + \varphi_k\Big)$$

где значек ρ обозначает одно из чисел 1, 2, 3, 4, . . . , а числовое значение коэффициентов $q'_1, q'_2, q'_3, \ldots q'_{k-1}$ может быть найдено по формулам

$$q'_1 = \cos\alpha_1 t_0 + \cos\alpha_2 t_0 + \cos\alpha_3 t_0 + \ldots + \cos\alpha_{k-1} t_0$$

$$q'_2 = \cos\alpha_1 t_0 \cos\alpha_2 t_0 + \cos\alpha_1 t_0 \cos\alpha_3 t_0 + \ldots + \cos\alpha_{k-2} t_0 \cos\alpha_{k-1} t_0 \qquad (12_a)$$

$$q'_3 = \cos\alpha_1 t_0 \cos\alpha_2 t_0 \cos\alpha_3 t_0 + \cos\alpha_1 t_0 \cos\alpha_2 t_0 \cos\alpha_4 t_0 + \ldots + \cos\alpha_{k-3} t_0 \cos\alpha_{k-2} t_0 \cos\alpha_{k-1} t_0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$q'_{k-1} = \cos\alpha_1 t_0 \cos\alpha_2 t_0 \cos\alpha_3 t_0 \ldots \cos\alpha_{k-2} t_0 \cos\alpha_{k-1} t_0$$

Эти формулы показывают, что коэффициенты q'_1, q'_2, $q'_3 \ldots q'_{k-1}$ суть коэффициенты уравнения, которое получается от разделения уравнения, служащего для определения неизвестных периодов, на бином $(\cos x - \cos\alpha_k t_0)$. Иметь в виду это обстоятельство весьма важно, так как оно позволяет при вычислениях произвести довольно значительное упрощение.

Если к уравнению (15) мы присоединим теперь уравнение

$$W_{\rho+1} = 2^{k-1} A_0 (1 - \cos\alpha_1 t_0)(1 - \cos\alpha_2 t_0) \ldots (1 - \cos\alpha_{k-1} t_0) +$$
$$+ 2^{k-1} A_k (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \ldots (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_{k-1} t_0) \sin\Big((\rho + k)\alpha_k t_0 + \varphi_k\Big) \qquad (16)$$

где значек ρ снова обозначает одно из чисел 1, 2, 3, 4..., то мы получим систему таких уравнений, в которые неизвестные A_k и φ_k будут входить в весьма удобной форме для определения того и другого из них. Развернутое в строку, уравнение (16), после перенесения члена $2^{k-1} A_0 (1 - q'_1 + q'_2 - q'_3 + \ldots \pm q'_{k-1})$ в левую часть, дает нам равенство

$$\Sigma^{k-1}_{\rho+1} - 2q'_1 \Sigma^{k-2}_{\rho+2} + 2^2 q'_2 \Sigma^{k-3}_{\rho+3} - 2^3 q'_3 \Sigma^{k-4}_{\rho+4} + \ldots \pm 2^{k-1} q'_{k-1} u_{\rho+k} -$$
$$- 2^{k-1} A_0 (1 - q'_1 + q'_2 - q'_3 + \ldots \pm q'_{k-1}) = \qquad (17)$$
$$= 2^{k-1} A_k (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_1 t_0)(\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_2 t_0)..(\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_{k-1} t_0) \sin\Big((\rho + k)\alpha_k t_0 + \varphi_k\Big)$$

Таким образом определение амплитуды A_k и фазы φ_k может быть произведено по формулам

$$\operatorname{tang}\Big((\rho + k)\alpha_k t_0 + \varphi_k\Big) = \frac{2M}{N} \sin\alpha_k t_0 \qquad (18)$$

$$A_k = \frac{M}{2^{k-1}(\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \ldots (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_{k-1} t_0) \sin\Big((\rho + k)\alpha_k t_0 + \varphi_k\Big)} \qquad (19)$$

или же

$$A_k = \frac{N}{2^k \sin\alpha_k t_0 (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \ldots (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_{k-1} t_0) \cos\Big((\rho + k)\alpha_k t_0 + \varphi_k\Big)} \qquad (20)$$

где буквы M и N заменяют собою левые части уравнений (17) и (15).

Если в этих формулах значку при буквах A_k, α_k и φ_k мы будем давать последовательно значения 1, 2, 3.... (k—1), коэффициентам q'_1, q'_2, $q'_3 \ldots q'_{k-1}$ будем придавать соответственные этим случаям частные значения согласно формулам (12), а в биномах, произведение из которых стоит в знаменателе дробей, выражающих собою числовое значение амплитуды A_k, будем менять места у $\operatorname{Cos}\alpha_k t_0$ и того косинуса, в котором значек при α одинаков с значком отыскиваемой амплитуды A, то мы найдем по ним все неизвестные амплитуды A_1, A_2, A_3,...A_k и фазы φ_1, φ_2, φ_3,....φ_k и задачу относительно решения системы уравнений (1) можем считать окончательно разрешенной.

Когда число уравнений в системе (1) будет равно $3k+1$, то по методу, изложенному выше, мы найдем вполне точное значение всех амплитуд A_1, A_2, A_3,...A_k, фаз φ_1, φ_2, φ_3,..,φ_k, периодов α_1, α_2, α_3...α_k и постоянного A_0. Может однако случиться, что число уравнений (1) будет больше числа всех неизвестных. Посмотрим, как в этом случае можно будет найти все неизвестиые амплитуды A_1, A_2...A_k и фазы φ_1, φ_2, φ_3...φ_k

Как можно найти неизвестные периоды α_1, α_2,...α_k и постоянное A_0 в том случае, когда число уравнений (1) больше $3k+1$, было показано выше. Поэтому будем предполагать, что периоды α и постоянное A_0 нам известны.

Мы видели, что амплитуды A_k и фаза φ_k могут быть определены решением одного из следующих уравнений

$$\Theta_1^{k-1} - 2q_1' \Theta_2^{k-2} + 2^2 q_2' \Theta_3^{k-3} - 2^3 q_3' \Theta_4^{k-4} + \ldots \pm 2^{k-1} q'_{k-1} D_k =$$

$$= 2^k A_k \sin\alpha_k t_0 (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \ldots (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_{k-1} t_0) \cos\Big((k+1)\alpha_k t_0 + \varphi_k\Big)$$

$$\Theta_2^{k-1} - 2q_1' \Theta_3^{k-2} + 2^2 q_2' \Theta_4^{k-3} - 2^3 q_3' \Theta_5^{k-4} + \cdots \pm 2^{k-1} q'_{k-1} D_{k+1} = \qquad (21)$$

$$= 2^k A_k \sin\alpha_k t_0 (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \ldots (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_{k-1} t_0) \cos\Big((k+2)\alpha_k t_0 + \varphi_k\Big)$$

. . . .

$$\Theta_{n-2\kappa-1}^{k-1} - 2q_1' \Theta_{n-2\kappa}^{k-2} + 2^2 q_2' \Theta_{n-2\kappa+1}^{k-3} - \ldots \pm 2^{k-1} q'_{k-1} D_{n-k-2} =$$

$$= 2^k A_k \sin\alpha_k t_0 (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \ldots (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_{k-1} t_0) \cos\Big((n-k-1)\alpha_\kappa t_0 + \varphi_\kappa\Big)$$

совместно с одним из уравнений

$$\Sigma_2^{k-1} - 2q_1' \Sigma_3^{k-2} + 2^2 q_2' \Sigma_4^{k-3} - \ldots \pm 2^{k-1} q'_{k-1} u_{k+1} -$$

$$- 2^{k-1} A_0 (1 - \cos\alpha_1 t_0)(1 - \cos\alpha_2 t_0) \ldots (1 - \cos\alpha_{k-1} t_0) =$$

$$= 2^{k-1} A_k (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_1 t_0)(\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_2 t_0) \ldots (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_{k-1} t_0) \sin\Big((k+1)\alpha_k t_0 + \varphi_k\Big)$$

$$\Sigma_3^{k-1} - 2q_1' \Sigma_4^{k-2} + 2^2 q_2' \Sigma_5^{k-3} - \ldots \pm 2^{k-1} q_{k-1} u_{k+2} -$$

$$- 2^{k-1} A_0 (1 - \cos\alpha_1 t_0)(1 - \cos\alpha_2 t_0) \ldots (1 - \cos\alpha_{k-1} t_0) = \qquad (22)$$

$$= 2^{k-1} A_k (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_1 t_0)(\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_2 t_0) .. (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_{k-1} t_0) \sin\Big((k+2)\alpha_k t_0 + \varphi_k\Big)$$

. . . .

$$\Sigma_{n-2\kappa}^{k-1} - 2q_1' \Sigma_{n-2\kappa+1}^{k-2} + 2^2 q_2' \Sigma_{n-2k+2}^{k-3} - \ldots \pm 2^{k-1} q'_{k-1} u_{n-k-1} -$$

$$- 2^{k-1} A_0 (1 - \cos\alpha_1 t_0)(1 - \cos\alpha_2 t_0) \ldots (1 - \cos\alpha_{\kappa-1} t_0) =$$

$$= 2^{k-1} A_k (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_1 t_0) \ldots (\cos\alpha_k t_0 - \cos\alpha_{\kappa-1} t_0) \sin\Big((n-k-1)\alpha_k t_0 + \varphi_\kappa\Big)$$

Возьмем сумму каждой из систем этих уравнений. Вводя знак $\sum$ для обозначения результата суммирования, сумму уравнений (21) можем изобразить так

$$\sum_{1}^{n-2k}\Theta_r^{k-1}-2q_1'\sum_{2}^{n-2k+1}\Theta_r^{k-2}+2^2q_2'\sum_{3}^{n-2k+2}\Theta_r^{k-3}-2^3q_3'\sum_{4}^{n-2k+3}\Theta_r^{k-4}+\ldots\pm2^{k-1}q_{k-1}'\sum_{k}^{n-k-1}D_r=$$

$$=2^kA_k\sin\alpha_kt_0(\cos\alpha_kt_0-\cos\alpha_1t_0)\ldots(\cos\alpha_kt_0-\cos\alpha_{k-1}t_0)\Big\{\cos\Big((k+1)\alpha_kt_0+\varphi_k\Big)+\ldots$$

$$+\cos\Big((n-k-1)\alpha_k t_0+\varphi_k\Big)\Big\} \qquad (23)$$

а сумму уравнений (24) написать в таком виде

$$\sum_{2}^{n-2k+1}\Sigma_r^{k-1}-2q_1'\sum_{3}^{n-2k+2}\Sigma_r^{k-2}+2^2q_2'\sum_{4}^{n-2k+3}\Sigma_r^{k-3}-\ldots$$

$$\pm2^{k-1}q_{k-1}'\sum_{k+1}^{n-k}u_r-2^kA_0(n-2k)(1-q_1'+q_2'-\ldots\pm q_{k-1}')= \qquad (24)$$

$$=2^{k-1}A_k(\cos\alpha_kt_0-\cos\alpha_1t_0)\ldots(\cos\alpha_kt_0-\cos\alpha_{k-1}t_0)\Big\{\sin\Big((k+1)\alpha_kt_0+\varphi_k\Big)+\ldots$$

$$+\sin\Big((n-k-1)\alpha_k t_0+\varphi_k\Big)\Big\}$$

Но из математики известно, что

$$\cos\Big((k+1)\alpha+\varphi\Big)+\cos\Big((k+2)\alpha+\varphi\Big)+\ldots+\cos\Big((n-k-1)\alpha+\varphi\Big)=$$

$$=\frac{\sin\frac{n-2k-1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\left(\frac{n}{2}\alpha+\varphi\right)$$

и

$$\sin\Big((k+1)\alpha+\varphi\Big)+\sin\Big((k+2)\alpha+\varphi\Big)+\ldots+\sin\Big((n-k-1)\alpha+\varphi\Big)=$$

$$=\frac{\sin\frac{n-2k-1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\left(\frac{n}{2}\alpha+\varphi\right)$$

а потому

$$M'=2^{k-1}A_k(\cos\alpha_k t_0-\cos\alpha_1 t_0)(\cos\alpha_k t_0-\cos\alpha_2 t_0)\ldots$$

$$\ldots(\cos\alpha_k t_0-\cos\alpha_{k-1} t_0)\frac{\sin\frac{n-2k-1}{2}\alpha_k t_0}{\sin\frac{\alpha_k t_0}{2}}\sin\left(\frac{n}{2}\alpha_k t_0+\varphi_k\right) \qquad (25)$$

$$N' = 2^k A_k \sin \alpha_k t_0 (\cos \alpha_k t_0 - \cos \alpha_1 t_0)(\cos \alpha_k t_0 - \cos \alpha_2 t_0) \ldots$$

$$\ldots (\cos \alpha_k t_0 - \cos \alpha_{k-1} t_0) \frac{\sin \frac{n-2k-1}{2} \alpha_k t_0}{\sin \frac{\alpha_k t_0}{2}} \cos\left(\frac{n}{2} \alpha_k t_0 + \varphi_k\right) \qquad (26)$$

где M' и N' суть левые части уравнений (23) и (24).

Очевидно, что если мы разделим первое из этих уравнений на второе, то мы найдем числовое значение $\operatorname{tg}\left(\frac{n}{2} \alpha_k t_0 + \varphi_k\right)$, которое потом нам может послужить и для нахождения фазы φ_k. Когда же эта фаза нам будет известна, то при помощи того или другого из уравнений (25) и (26) может быть найдено числовое значение и амплитуды A_k.

Чтобы определить все остальные амплитуды и фазы следует поступить с значком k и коэффициентами $q'_1, q'_2, q'_3, \ldots q'_{k-1}$ так, как было пояснено выше. Тогда изменившиеся надлежащим образом формулы (25) и (26) окажутся пригодными для вычисления по ним всех остальных неизвестных амплитуд и фаз.

ГЛАВА IV.

Чтобы показать на примере ход вычислений согласно вышеизложенной теории, решим задачу о периодах в пятнообразовательной деятельности солнца по наблюдениям астронома Швабе. Я беру эти наблюдения потому, что они обнимают собою промежуток в 43 года и принадлежат одному наблюдателю, почему могут быть использованы непосредственно без вычисления так называемых относительных чисел.

По наблюдениям Швабе количество пятен на солнце было таково:

1826 г.	118	1840 г.	152	1854 г.	67
1827	161	1841	102	1855	38
1828	225	1842	68	1856	34
1829	199	1843	34	1857	98
1830	190	1844	52	1858	202
1831	149	1845	114	1859	205
1832	84	1846	157	1860	211
1833	33	1847	257	1861	204
1834	51	1848	330	1862	160
1835	173	1849	238	1863	124
1836	272	1850	186	1864	130
1837	333	1851	151	1865	93
1838	282	1852	125	1866	45
1839	162	1853	91	1867	25
				1868	101

Из этих наблюдений явствует, что пятнообразовательная деятельность солнца без всякого сомнения есть периодическое явление. Ограничимся предположением, что в ней участвуют четыре независимых периода, которые и надлежит определить.

Вычислим прежде всего ряды разностей и сумм до 4-го порядка включительно. Эти ряды будут следующие:

Δu_k	S_k	S_k^2	S_k^3	S_k^4	Δu_k	S_k	S_k^2	S_k^3	S_k^4
43	17	— 50	—209	—389	73	22	— 56	—184	—390
64	55	— 19	—140	—191	— 92	—127	—196	—328	—488
— 26	— 67	—159	—180	53	— 52	— 78	—128	—206	—212
— 9	— 74	—121	— 51	184	— 35	— 69	—132	—160	— 86
— 41	— 92	— 21	233	611	— 26	— 50	— 78	— 6	276
— 65	— 47	70	235	387	— 34	— 63	— 28	74	239
— 51	71	254	378	273	— 24	— 28	72	282	564
18	117	165	152	35	— 29	35	102	165	181
122	183	124	—105	—600	— 4	100	210	282	278
99	48	— 13	—117	—280	64	67	63	16	—147
61	— 59	—229	—483	—793	104	110	72	— 4	—160
— 51	— 61	—104	—163	—177	3	— 4	— 47	—163	—409
—120	—170	—254	—310	—176	6	— 38	— 76	—156	—250
— 10	— 43	— 59	— 14	208	— 7	— 43	—116	—246	
— 50	— 84	— 56	134	494	— 44	— 38	— 80	— 94	
— 34	— 16	45	222	537	— 36	— 73	—130		
— 34	28	190	360	411	6	— 42	— 14		
18	61	177	315	397	— 37	— 57			
62	162	170	51	—264	— 48	28			
43	116	138	82	—102	— 20				
100	8	—119	—315	—643	76				

Так как вертикальный ряд с суммами четвертого порядка обрывается на 34-ом горизонтальном ряду цыфр, то из этого следует, что система начальных уравнений, служащая для определения коэффициентов ρ, q, r и s уравнения четвертой степени, из которого определяются неизвестные периоды, должна состоять из 34-х уравнений. Уравнения эти будут согласно выражению функции T_k (см. формулу 7 на стр. 63) таковы:

1. $-389 + 280\,\rho - 636\,q + 592\,r - 656\,s = 0$
2. $-191 + 360\,\rho - 484\,q + 736\,r - 1040\,s = 0$
3. $53 + 120\,\rho - 84\,q + 376\,r - 816\,s = 0$
4. $184 - 466\,\rho + 280\,q - 568\,r + 288\,s = 0$
5. $611 - 470\,\rho + 1016\,q - 936\,r + 1952\,s = 0$

6. $387 - 756\,p + 660\,q - 1464\,r + 1584\,s = 0$
7. $273 - 304\,p + 496\,q - 384\,r + 976\,s = 0$
8. $35 + 210\,p - 52\,q + 472\,r - 816\,s = 0$
9. $-600 + 234\,p - 916\,q + 488\,r - 1920\,s = 0$
10. $-280 + 966\,p - 416\,q + 1360\,r - 160\,s = 0$
11. $-793 + 326\,p - 1016\,q + 344\,r - 800\,s = 0$
12. $-177 + 620\,p - 236\,q + 672\,r - 544\,s = 0$
13. $-176 + 28\,p - 224\,q + 128\,r - 544\,s = 0$
14. $208 - 268\,p + 180\,q - 224\,r + 288\,s = 0$
15. $494 - 444\,p + 760\,q - 488\,r + 992\,s = 0$
16. $537 - 720\,p + 708\,q - 1296\,r + 688\,s = 0$
17. $411 - 630\,p + 680\,q - 928\,r + 1600\,s = 0$
18. $397 - 102\,p + 552\,q - 64\,r + 1168\,s = 0$
19. $-264 - 164\,p - 476\,q - 176\,r - 1472\,s = 0$
20. $-102 + 630\,p - 224\,q + 1016\,r - 832\,s = 0$
21. $-643 + 368\,p - 784\,q + 624\,r - 560\,s = 0$
22. $-390 + 656\,p - 512\,q + 552\,r - 416\,s = 0$
23. $-488 + 412\,p - 528\,q + 400\,r - 544\,s = 0$
24. $-212 + 320\,p - 312\,q + 504\,r - 384\,s = 0$
25. $-86 + 12\,p - 112\,q + 224\,r - 464\,s = 0$
26. $276 - 148\,p + 288\,q - 280\,r - 64\,s = 0$
27. $239 - 564\,p + 408\,q - 800\,r + 1024\,s = 0$
28. $564 - 330\,p + 840\,q - 536\,r + 1664\,s = 0$
29. $181 - 564\,p + 252\,q - 880\,r + 48\,s = 0$
30. $278 - 32\,p + 288\,q + 32\,r + 96\,s = 0$
31. $-147 + 8\,p - 188\,q + 304\,r - 112\,s = 0$
32. $-160 + 326\,p - 304\,q + 344\,r - 704\,s = 0$
33. $-409 + 312\,p - 464\,q + 304\,r - 576\,s = 0$
34. $-250 + 492\,p - 320\,q + 584\,r + 96\,s = 0$

При решении этой совокупности начальных уравнений по способу наименьших квадратов им отвечают нормальные уравнения с такими коэффициентами:

1. $6514160\,p - 5959000\,q + 8979180\,r - 9071904\,s - 4223656 = 0$
2. $5959000\,p - 9456128\,q + 9468928\,r - 14845924\,s - 6549596 = 0$
3. $8979180\,p - 9468928\,q + 14899904\,r - 15202944\,s - 6246744 = 0$
4. $9071904\,p - 14845924\,q + 15202944\,r - 29293568\,s - 9495280 = 0$

Отсюда получаем для ρ, q, r и s следующие значеиия:

$$\rho = 0{,}199510$$
$$q = -0{,}905972$$
$$r = -0{,}161418$$
$$s = 0{,}113015$$

Зная их, пишем уравнение 4-ой степени, из которого определяются искомые периоды, в таком виде:

$$\cos^4 x - 0{,}199510 \cos^3 x - 0{,}905972 \cos^2 x + 0{,}161418 \cos x + 0{,}113015 = 0$$

Корни этого уравнения имеют следующее значение:

$\cos x_1 = 0{,}857300 = \cos 30°59'7''$ $\quad \cos x_3 = -0{,}293626 = \cos 107°4'30''$

$\cos x_2 = 0{,}512262 = \cos 59°11'8''$ $\quad \cos x_4 = -0{,}876426 = \cos 151°12'43''$

Следовательно

$$\alpha_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 30°59'7'' \qquad \alpha_3 = \frac{2\pi}{T_2} = 107°4'30''$$

$$\alpha_2 = \frac{2\pi}{T_2} = 59°11'8'' \qquad \alpha_4 = \frac{2\pi}{T_4} = 151°12'43''$$

откуда имеем:

$T_1 = 11{,}616$ год. $\quad T_2 = 6{,}083$ г. $\quad T_3 = 3{,}362$ г. $\quad T_4 = 2{,}381$ г.

Таков ответ на вопрос о периодах в пятнообразовательной деятельности солнца, если для решения его пользоваться наблюдениями Швабе. Полученный результат интересен в нескольких отношениях. Вопервых, он показывает, что, не смотря на продолжительность в 43 года, наблюдения Швабе не обнаруживают участия в образовании пятен на солнце причины, вызывающей появление периодической изменчивости в количестве пятен с периодом свыше 11,62 лет, что, как известно, признается многими астрономами. Во вторых, он констатирует в пятнообразовательной деятельности солнца изменчивость с периодами меньшими 11,62 лет. В третьих, он доказывает, что все периоды находятся друг с другом в отношениях, близких к кратным. Все это говорит как будто бы за то, что пятнообразовательная деятельность солнца есть периодически изменяющееся явление, которое математически можно выразить рядом Фурье.

ГЛАВА V.

Вернемся к тому, что было изложено в главе второй. Вникая в сущность преобразований, успешно приводящих к решению задачу об определении из наблюдений неизвестных периодов, мы можем видеть, что задача разрешается благодаря удачному использованию того свойства синусоиды, что ординаты трех равноотстоящих точек ее всегда связаны соотношением

$$\frac{y_{k+1} + y_{k-1}}{2y_k} = \text{постоянному числу}$$

Но это свойство не принадлежит одной синусоиде. Таким же свойством обладает кривая, уравнение которой

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$$

а также прямая линия. Поэтому нахождение неизвестных периодов по методу, изложенному в главе второй, становится возможным и тогда, когда функция u выражается уравнением такого вида:

$$u = A_0 + A_1x + B_1x^2 + A_2e^{\alpha x} + B_2e^{-\alpha x} + C_1\sin(\beta_1x + \varphi_1) + C_2\sin(\beta_2x + \varphi_2) + \ldots$$

В самом деле, предположим, что наблюдения удовлетворяют системе уравнений:

$$u_1 = A_0 + A_1 + B_1 + A_2e^{\alpha} + B_2e^{-\alpha} + C_1\sin(\beta_1 + \varphi_1) + \\ + C_2\sin(\beta_2 + \varphi_2) + C_3\sin(\beta_3 + \varphi_3) + \ldots$$

$$u_2 = A_0 + 2A_1 + 4B_1 + A_2e^{2\alpha} + B_2e^{-2\alpha} + C_1\sin(2\beta_1 + \varphi_1) + \\ + C_2\sin(2\beta_2 + \varphi_2) + C_3\sin(2\beta_3 + \varphi_3) + \ldots$$

$$u_3 = A_0 + 3A_1 + 9B_1 + A_2e^{3\alpha} + B_2e^{-3\alpha} + C_1\sin(3\beta_1 + \varphi_1) + \\ + C_2\sin(3\beta_2 + \varphi_2) + C_3\sin(3\beta_3 + \varphi_3) + \ldots$$

. . . .

$$u_{n-1} = A_0 + A_1(n-1) + B_1(n-1)^2 + A_2e^{(n-1)\alpha} + B_2e^{-(n-1)\alpha} + \\ + C_1\sin((n-1)\beta_1 + \varphi_1) + C_2\sin((n-1)\beta_2 + \varphi_2) + \ldots$$

$$u_n = A_0 + A_1n + B_1n^2 + A_2e^{n\alpha} + B_2e^{-n\alpha} + C_1\sin(n\beta_1 + \varphi_1) + C_2\sin(n\beta_2 + \varphi_2) + \ldots$$

Если составим разности

$\Delta u_1 = u_2 - u_1$ $\Delta u_2 = u_3 - u_2$ $\Delta u_3 = u_4 - u_3 \ldots$ и т. д., то значение их выразится равенствами:

$$\Delta u_1 = A_1 + 3B_1 + A_2\left(e^{\alpha} - 1\right)e^{\alpha} + B_2\left(e^{-\alpha} - 1\right)e^{-\alpha} + \\ + 2C_1\sin\frac{1}{2}\beta_1\cos\left(\frac{3}{2}\beta_1 + \varphi_1\right) + 2C_2\sin\frac{1}{2}\beta_2\cos\left(\frac{3}{2}\beta_2 + \varphi_2\right) + \ldots$$

$$\Delta u_2 = A_1 + 5B_1 + A_2\left(e^{\alpha} - 1\right)e^{2\alpha} + B_2\left(e^{-\alpha} - 1\right)e^{-2\alpha} + \\ + 2C_1\sin\frac{1}{2}\beta_1\cos\left(\frac{5}{2}\beta_1 + \varphi_1\right) + 2C_2\sin\frac{1}{2}\beta_2\cos\left(\frac{5}{2}\beta_2 + \varphi_2\right) + \ldots$$

. . . .

$$\Delta u_{n-1} = A_1 + B_1(2n - 1) + A_2\left(e^{\alpha} - 1\right)e^{(n-1)\alpha} + B_2\left(e^{-\alpha} - 1\right)e^{-(n-1)\alpha} + \\ + 2C_1\sin\frac{1}{2}\beta_1\cos\left(\frac{2n-1}{2}\beta_1 + \varphi_1\right) + 2C_2\sin\frac{1}{2}\beta_2\cos\left(\frac{2n-1}{2}\beta_2 + \varphi_2\right) + \ldots$$

Отсюда видно, что в правой части этих равенств первые два члена отвечают ординатам прямой линии, два следующих — ординатам кривой, представляющей частный случай кривой

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x},$$

а остальные члены — ординатам синусоид. По этой причине для исключения из них неизвестных A_1 и B_1 совсем нет необходимости прибегать к составлению разностей высшего порядка, а можно прямо приступить к нахождению сумм первого и высших порядков. И действительно, составив суммы первого порядка

$$S_1 = 2(A_1 + 5B_1) + \left\{A_2(e^{\alpha} - 1)e^{2\alpha} + B_2(e^{-\alpha} - 1)e^{-2\alpha}\right\}(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) +$$

$$+ 4C_1 \sin\frac{1}{2}\beta_1 \cos\beta_1 \cos\left(\frac{5}{2}\beta_1 + \varphi_1\right) + 4C_2 \sin\frac{1}{2}\beta_2 \cos\beta_2 \cos\left(\frac{5}{2}\beta_2 + \varphi_2\right) + \dots$$

$$S_2 = 2(A_1 + 7B_1) + \left\{A_2(e^{\alpha} - 1)e^{3\alpha} + B_2(e^{-\alpha} - 1)e^{-3\alpha}\right\}(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) +$$

$$+ 4C_1 \sin\frac{1}{2}\beta_1 \cos\beta_1 \cos\left(\frac{7}{2}\beta_1 + \varphi_1\right) + 4C_2 \sin\frac{1}{2}\beta_2 \cos\beta_2 \cos\left(\frac{7}{2}\beta_2 + \varphi_2\right) + \dots$$

. . . .

$$S_{n-3} = 2(A_1 + (2n - 3)B_1) + \left\{A_2(e^{\alpha} - 1)e^{(n-2)\alpha} + B_2(e^{-\alpha} - 1)e^{-(n-2)\alpha}\right\}(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) +$$

$$+ 4C_1 \sin\frac{1}{2}\beta_1 \cos\beta_1 \cos\left(\frac{2n-3}{2}\beta_1 + \varphi_1\right) + 4C_2 \sin\frac{1}{2}\beta_2 \cos\beta_2 \cos\left(\frac{2n-3}{2}\beta_2 + \varphi_2\right) + \dots$$

видим, что, если из какой либо суммы $S_к$ станем вычитать удвоенную разность $\Delta u_{к+1}$ то в результате получим выражение

$$\rho_к = S_к - 2\Delta u_{к+1} = \left\{A_2(e^{\alpha} - 1)e^{(к+1)\alpha} + B_2(e^{-\alpha} - 1)e^{-(к+1)\alpha}\right\}(e^{\alpha} + e^{-\alpha} - 2) +$$

$$+ 4C_1 \sin\frac{1}{2}\beta_1 (\cos\beta_1 - 1) \cos\left(\frac{2k+3}{2}\beta_1 + \varphi_1\right) + \dots$$

совершенно независящее ни от A_1 ни от B_1. Поэтому будем иметь

$$\rho_1 = \left\{A_2(e^{\alpha} - 1)e^{2\alpha} + B_2(e^{-\alpha} - 1)e^{-2\alpha}\right\}(e^{\alpha} + e^{-\alpha} - 2) +$$

$$4C_1 \sin\frac{1}{2}\beta_1 (\cos\beta_1 - 1) \cos\left(\frac{5}{2}\beta_1 + \varphi_1\right) + 4C_2 \sin\frac{1}{2}\beta_2 (\cos\beta_2 - 1) \cos\left(\frac{5}{2}\beta_2 + \varphi_2\right) + \dots$$

$$\rho_2 = \left\{A_2(e^{\alpha} - 1)e^{3\alpha} + B_2(e^{-\alpha} - 1)e^{-3\alpha}\right\}(e^{\alpha} + e^{-\alpha} - 2) +$$

$$4C_1 \sin\frac{1}{2}\beta_1 (\cos\beta_1 - 1) \cos\left(\frac{7}{2}\beta_1 + \varphi_1\right) + 4C_2 \sin\frac{1}{2}\beta_2 (\cos\beta_2 - 1) \cos\left(\frac{7}{2}\beta_2 + \varphi_2\right) + \dots$$

. . . .

$$P_{n-3}=\left\{A_2(e^{\alpha}-1)e^{(n-2)\alpha}+B_2(e^{-\alpha}-1)e^{-(n-2)\alpha}\right\}(e^{\alpha}+e^{-\alpha}-2)+$$

$$+4C_1\sin\frac{1}{2}\beta_1(\cos\beta_1-1)\cos\left(\frac{2n-1}{2}\beta_1+\varphi_1\right)+4C_2\sin\frac{1}{2}\beta_2(\cos\beta_2-1)\cos\left(\frac{2n-1}{2}\beta_2+\varphi_2\right)+\ldots$$

Легко можем, далее, убедиться, что, применив к только-что написанным уравнениям тот же метод исключения неизвестных, мы получим уравнения, в которые не будут входить ни A_2, ни B_2, ни α, так как

$$P_3+P_1=\left\{A_2(e^{\alpha}-1)e^{3\alpha}+B_2(e^{-\alpha}-1)e^{-3\alpha}\right\}(e^{\alpha}+e^{-\alpha}-2)(e^{\alpha}+e^{-\alpha})+$$

$$+8C_1\sin\frac{1}{2}\beta_1(\cos\beta_1-1)\cos\beta_1\cos\left(\frac{7}{2}\beta_1+\varphi_1\right)+\ \ldots$$

$$P_4+P_2=\left\{A_2(e^{\alpha}-1)e^{4\alpha}+B_2(e^{-\alpha}-1)e^{-4\alpha}\right\}(e^{\alpha}+e^{-\alpha}-2)(e^{\alpha}+e^{-\alpha})+$$

$$+8C_1\sin\frac{1}{2}\beta_1(\cos\beta_1-1)\cos\beta_1\cos\left(\frac{9}{2}\beta_1+\varphi_1\right)+\ \ldots$$

. . . .

$$P_{n-3}+P_{n-5}=\left\{A_2(e^{\alpha}-1)e^{(n-3)\alpha}+B_2(e^{-\alpha}-1)e^{-(n-3)\alpha}\right\}(e^{\alpha}+e^{-\alpha}-2)(e^{\alpha}+e^{-\alpha})+$$

$$+8C_1\sin\frac{1}{2}\beta_1(\cos\beta_1-1)\cos\beta_1\cos\left(\frac{2n-5}{2}\beta_1+\varphi_1\right)+\ \ldots$$

и следовательно

$$Q_1=P_3+P_1-2P_2(e^{\alpha}+e^{-\alpha})=$$

$$=8C_1\sin\frac{1}{2}\beta_1(\cos\beta_1-1)\left\{\cos\beta_1-(e^{\alpha}+e^{-\alpha})\right\}\cos\left(\frac{7}{2}\beta_1+\varphi_1\right)+\ \ldots$$

$$Q_2=P_4+P_2-2P_3(e^{\alpha}+e^{-\alpha})=$$

$$=8C_1\sin\frac{1}{2}\beta_1(\cos\beta_1-1)\left\{\cos\beta_1-(e^{\alpha}+e^{-\alpha})\right\}\cos\left(\frac{9}{2}\beta_1+\varphi_1\right)+\ \ldots$$

$$Q_3=P_5+P_3-2P_4(e^{\alpha}+e^{-\alpha})=$$

$$=8C_1\sin\frac{1}{2}\beta_1(\cos\beta_1-1)\left\{\cos\beta_1-(e^{\alpha}+e^{-\alpha})\right\}\cos\left(\frac{11}{2}\beta_1+\varphi_1\right)+\ \ldots$$

. . . .

$$Q_{n-5}=P_{n-3}+P_{n-5}-2P_{n-4}(e^{\alpha}+e^{-\alpha})=$$

$$=8C_1\sin\frac{1}{2}\beta_1(\cos\beta_1-1)\left\{\cos\beta_1-(e^{\alpha}+e^{-\alpha})\right\}\cos\left(\frac{2n-5}{2}\beta_1+\varphi_1\right)+\ \ldots$$

Нет необходимости вести преобразование полученных уравнени дальше, так как совершенно очевидно, что уравнения Q суть те же самые которые мы имели в главе второй. Достаточно положить в них

$$1 = \cos\alpha_1 \qquad \cos\beta_1 = \cos\alpha_3$$

$$e^{\alpha} + e^{-\alpha} = \cos\alpha_2 \qquad \cos\beta_4 = \cos\alpha_4 \qquad \text{и т. д.}$$

чтобы убедиться, что эта так на самом деле.

Итак, не смотря на более сложный вид функции u, нахождение неизвестных периодов ее может быть сведено к операциям, одинаковым с теми, которые были рассмотрены в главе второй. Вся разница между этими случаями заключается в том, что в окончательных уравнениях место одного из искомых косинусов здесь будет занимать единица, которую условно можно принимать за косинус от нуля, вместо другого-выражение $e^{\alpha} + e^{-\alpha}$. Вследствие этого нахождение, например, двух периодов сведется здесь, в конце концов к нахождению корней уравнения третьей степени, так как одним из корней основного уравнения четвертой степени обязательно будет единица.

Замечу, что изложенная здесь теория может иметь приложение при решении уравнений, подобных уравнению Кеплера.

ГЛАВА VI.

В виду особого значения, какое приобретает в некоторых случаях численное значение сумм S_k, S_k^2, S_k^3, . . . S_k^m остановимся на выяснении этого вопроса. Из способа составления этих сумм следует, что, когда имеется достаточно обширный ряд разностей Δu, любая из них может быть легко вычислена. В самом деле

$$S_k = \Delta u_{k+2} + \Delta u_k$$

$$S_k^2 = S_{k+2} + S_k = \Delta u_{k+4} + 2\Delta u_{k+2} + \Delta u_k$$

$$S_k^3 = S_{k+2}^2 + S_k^2 = \Delta u_{k+6} + 3\Delta u_{k+4} + 3\Delta u_{k+2} + \Delta u_k$$

$$S_k^4 = S_{k+2}^3 + S_k^3 = \Delta u_{k+8} + 4\Delta u_{k+6} + 6\Delta u_{k+4} + 4\Delta u_{k+2} + \Delta u_k$$

. . . .

$$S_k^m = S_{k+2}^{m-1} + S_k^{m-1} = \Delta u_{k+2m} + \frac{m}{1}\Delta u_{k+2m-2} + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta u_{k+2m-4} +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\Delta u_{k+2m-6} + \dots + \Delta u_k$$

Подставим в эти формулы вместо Δu значения их согласно равенствам, данным в главе II, (см. стр. 59 и 60) заменив в них ради удобства последующих преобразований косинусы переменного угла равными им величинами на основании Эйлеровых аналогий. Сделав это, получим для сумм S_k, S_k^2, S_k^3, . . . S_k^m выраження следующего вида:

$$S_k = 2\left(A_1 + (3+2\text{к})B_1\right) + A_2(e^{\alpha}-1)(e^{2\alpha}+1)e^{k\alpha} + B_2(e^{-\alpha}-1)(e^{-2\alpha}+1)e^{-k\alpha} +$$

$$+ C_1 \sin\frac{1}{2}\beta_1 \left\{ e^{i\left(\frac{2k+1}{2}\beta_1+\varphi_1\right)}(e^{2i\beta_1}+1) + e^{-i\left(\frac{2k+1}{2}\beta_1+\varphi_1\right)}(e^{-2i\beta_1}+1) \right\} + \ldots$$

$$S_k^2 = 2^2\left(A_1 + (5+2\text{к})B_1\right) + A_2(e^{\alpha}-1)(e^{2\alpha}+1)^2 e^{k\alpha} + B_2(e^{-\alpha}-1)(e^{-2\alpha}+1)^2 e^{-k\alpha} +$$

$$+ C_1 \sin\frac{1}{2}\beta_1 \left\{ e^{i\left(\frac{2k+1}{2}\beta_1+\varphi_1\right)}(e^{2i\beta_1}+1)^2 + e^{-i\left(\frac{2k+1}{2}\beta_1+\varphi_1\right)}(e^{-2i\beta_1}+1)^2 \right\} + \ldots$$

. . . .

$$S_k^m = 2^m\left(A_1 + (2m+2\text{к}+1)B_1\right) + A_2(e^{\alpha}-1)(e^{2\alpha}+1)^m e^{k\alpha} + B_2(e^{-\alpha}-1)(e^{-2\alpha}+1)^m e^{-k\alpha} +$$

$$+ C_1 \sin\frac{1}{2}\beta_1 \left\{ e^{i\left(\frac{2k+1}{2}\beta_1+\varphi_1\right)}(e^{2i\beta_1}+1)^m + e^{-i\left(\frac{2k+1}{2}\beta_1+\varphi_1\right)}(e^{-2i\beta_1}+1)^m \right\} + \ldots$$

Рассматривая эти формулы, можем видеть, что в общем случае ряды сумм какого угодно порядка должны давать числа с довольно сложной и запутанной изменчивостью. Но если в суммах S_k, S_k^2, . . . S_k^m члены, зависящие от периодов β, будут выпадать, то изменчивость рядов сделается проще и в частных случаях может свестись к изменчивости членов арифметической или геометрической прогрессии. Очевидно, это должно произойти тогда, когда данный ряд наблюдений или совсем непериодический и когда, следовательно, все β равны нулю, или зависит от таких периодов β, для которых

$$e^{2i\beta_1} + 1 = 0 \qquad e^{-2i\beta_1} + 1 = 0$$

$$e^{2i\beta_2} + 1 = 0 \qquad e^{-2i\beta_2} + 1 = 0$$

$$e^{2i\beta_3} + 1 = 0 \qquad e^{-2i\beta_3} + 1 = 0$$

и т. д.

Заменяя в этих уравнениях показательные члены тригонометрическими на основании Эйлеровых аналогий, найдем равнозначащие им уравнения такого вида:

$$\sin 2\beta_1 = 0 \qquad \cos 2\beta_1 + 1 = 0$$

$$\sin 2\beta_2 = 0 \qquad \cos 2\beta_2 + 1 = 0$$

$$\sin 2\beta_3 = 0 \qquad \cos 2\beta_4 + 1 = 0$$

и т. д.

откуда следует, что периоды β_1, β_2, β_3, . . . должны иметь одно из следующих значений $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots \frac{(2k+1)\pi}{2}$.

Очевидно, что в подобных случаях нахождение неизвестных периодов по общему способу делается излишним.

Чтобы показать на частном примере приложение только-что сказанного, рассмотрим следующую задачу. Представим себе, что мы имеем семейство парабол вида

$$y = A + Bx + Cx^2 \tag{27}$$

и предположим, что мы совершаем переход от одной кривой к другой так, что, когда $x = 1$, то мы получаем ординату первой кривой из этого семейства, при $x = 2$ — ординату второй кривой, при $x = 3$ — ординату третьей кривой и т. д., а самый переход совершаем в таком порядке, чтобы в конце его вернуться к начальной кривой. Поставленные в таком виде условия математически равноценны допущению, что в уравнении (27) коэффициенты A, B, и C суть периодические функции вида:

$$A = a_0 + a_1 \sin\beta x + a_2 \cos\beta x$$
$$B = b_0 + b_1 \sin\beta x + b_2 \cos\beta x$$
$$C = c_0 + c_1 \sin\beta x + c_2 \cos\beta x$$

Отсюда следует, что значения ординат, отвечающие многократному переходу по кривым всего семейства, должны иметь сложную периодическую изменчивость, так как они представляют значение функции

$$y = a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + (a_1 + b_1 x + c_1 x^2)\sin\beta x + \\ (a_2 + b_2 x + c_2 x^2)\cos\beta x \tag{28}$$

Решим теперь вопрос, могут ли составленные из них суммы $S_к$, $S_к^2$, $S_к^3$, ... $S_к^m$ совершенно не зависеть от периода β?

Найдем прежде всего значения разностей Δy. Эти разности будут таковы:

$$\Delta y_1 = b_0 + 3c_0 + a_1(\sin 2\beta - \sin\beta) + b_1(2\sin 2\beta - \sin\beta) + c_1(4\sin 2\beta - \sin\beta) + \\ + a_2(\cos 2\beta - \cos\beta) + b_2(2\cos 2\beta - \cos\beta) + c_2(4\cos 2\beta - \cos\beta)$$

$$\Delta y_2 = b_0 + 5c_0 + a_1(\sin 3\beta - \sin 2\beta) + b_1(3\sin 3\beta - 2\sin 2\beta) + c_1(9\sin 3\beta - 4\sin 2\beta) + \\ a_2(\cos 3\beta - \cos 2\beta) + b_2(3\cos 3\beta - 2\cos 2\beta) + c_2(9\cos 3\beta - 4\cos 2\beta)$$

$$\Delta y_3 = b_0 + 7c_0 + a_1(\sin 4\beta - \sin 3\beta) + b_1(4\sin 4\beta - 3\sin 3\beta) + c_1(16\sin 4\beta - 9\sin 3\beta) + \\ + a_2(\cos 4\beta - \cos 3\beta) + b_2(4\cos 4\beta - 3\cos 3\beta) + c_2(16\cos 4\beta - 9\cos 3\beta)$$

. . . .

$$\Delta y_к = b_0 + (2k+1)c_0 + a_1\Big(\sin(k+1)\beta - \sin k\beta\Big) + \\ + b_1\Big\{(k+1)\sin(k+1)\beta - k\sin k\beta\Big\} + c_1\Big\{(k+1)^2\sin(k+1)\beta - k^2\sin k\beta\Big\} + \\ + a_2\Big(\cos(k+1)\beta - \cos k\beta\Big) + b_2\Big\{(k+1)\cos(k+1)\beta - k\cos k\beta\Big\} + \\ + c_2\Big\{(k+1)^2\cos(k+1)\beta - k^2\cos k\beta\Big\}$$

Составленные по этим выражениям для разностей Δy значения сумм S_k, $S^2_к$, $S^3_к$ . . . $S^m_к$ получают следующий вид:

$$S_к = 2\left(b_0 + (3+2k)c_0\right) + a_1\left\{\sin(k+3)\beta - \sin(k+2)\beta + \sin(k+1)\beta - \sin k\beta\right\} +$$

$$+ b_1\left\{(k+3)\sin(k+3)\beta - (k+2)\sin(k+2)\beta + (k+1)\sin(k+1)\beta - k\sin k\beta\right\} +$$

$$+ c_1\left\{(k+3)^2\sin(k+3)\beta - (k+2)^2\sin(k+2)\beta + (k+1)^2\sin(k+1)\beta - k^2\sin k\beta\right\} +$$

$$+ a_2\left\{\cos(k+3)\beta - \cos(k+2)\beta + \cos(k+1)\beta - \cos k\beta\right\} +$$

$$+ b_2\left\{(k+3)\cos(k+3)\beta - (k+2)\cos(k+2)\beta + (k+1)\cos(k+1)\beta - k\cos k\beta\right\} +$$

$$+ c_2\left\{(k+3)^2\cos(k+3)\beta - (k+2)^2\cos(k+2)\beta + (k+1)^2\cos(k+1)\beta - k^2\cos k\beta\right\} +$$

$$S^2_k = 2^2\left(b_0 + (5+2k)c_0\right) + a_1\left\{\sin(k+5)\beta - \sin(k+4)\beta +\right.$$

$$\left. + 2\left(\sin(k+3)\beta - \sin(k+2)\beta\right) + \sin(k+1)\beta - \sin k\beta\right\} +$$

$$+ b_1\left\{(k+5)\sin(k+5)\beta - (k+4)\sin(k+4)\beta +\right.$$

$$\left. + 2\left((k+3)\sin(k+3)\beta - (k+2)\sin(k+2)\beta\right) + (k+1)\sin(k+1)\beta - k\sin k\beta\right\} +$$

$$+ c_1\left\{(k+5)^2\sin(k+5)\beta - (k+4)^2\sin(k+4)\beta +\right.$$

$$\left. + 2\left((k+3)^2\sin(k+3)\beta - (k+2)^2\sin(k+2)\beta\right) + (k+1)^2\sin(k+1)\beta - k^2\sin k\beta\right\} +$$

$$+ a_2\left\{\cos(k+5)\beta - \cos(k+4)\beta + 2\left(\cos(k+3)\beta - \cos(k+2)\beta\right) + \cos(k+1)\beta - \cos k\beta\right\} +$$

$$+ b_2\left\{(k+5)\cos(k+5)\beta - (k+4)\cos(k+4)\beta +\right.$$

$$\left. + 2\left((k+3)\cos(k+3)\beta - (k+2)\cos(k+2)\beta\right) + (k+1)\cos(k+1) - k\cos k\beta\right\} +$$

$$+ c_2\left\{(k+5)^2\cos(k+5)\beta - (k+4)^2\cos(k+4)\beta +\right.$$

$$\left. + 2\left((k+3)^2\cos(k+3)\beta - (k+2)^2\cos(k+2)\beta\right) + (k+1)^2\cos(k+1)\beta - k^2\cos k\beta\right\}$$

$$S^3_k = 2^3\left(b_0 + (7+2к)c_0\right) + a_1\left\{\sin(k+7)\beta - \sin(k+6)\beta +\right.$$

$$\left. + 3\left(\sin(k+5)\beta - \sin(k+4)\beta\right) + 3\left(\sin(k+3)\beta - \sin(k+2)\beta\right) + \sin(k+1)\beta - \sin k\beta\right\} +$$

$$+b_1\Big\{(k+7)\sin(k+7)\beta-(k+6)\sin(k+6)\beta+3\Big((k+5)\sin(k+5)\beta-(k+4)\sin(k+4)\beta\Big)+$$

$$+3\Big((k+3)\sin(k+3)\beta-(k+2)\sin(k+2)\beta\Big)+(k+1)\sin(k+1)\beta-k\sin k\beta\Big\}+$$

$$+c_1\Big\{(k+7)^2\sin(k+7)\beta-(k+6)^2\sin(k+6)\beta+3\Big((k+5)^2\sin(k+5)\beta-(k+4)^2\sin(k+4)\beta\Big)+$$

$$+3\Big((k+3)^2\sin(k+3)\beta-(k+2)^2\sin(k+2)\beta\Big)+(k+1)^2\sin(k+1)\beta-k^2\sin k\beta\Big\}+$$

$$+a_2\Big\{\cos(k+7)\beta-\cos(k+6)\beta+3\Big(\cos(k+5)\beta-\cos(k+4)\beta\Big)+$$

$$+3\Big(\cos(k+3)\beta-\cos(k+2)\beta\Big)+\cos(k+1)\beta-\cos k\beta\Big\}+$$

$$+b_2\Big\{(k+7)\cos(k+7)\beta-(k+6)\cos(k+6)\beta+3\Big((k+5)\cos(k+5)\beta-(k+4)\cos(k+4)\beta\Big)+$$

$$+3\Big((k+3)\cos(k+3)\beta-(k+2)\cos(k+2)\beta\Big)+(k+1)\cos(k+1)\beta-k\cos k\beta\Big\}+$$

$$+c_2\Big\{(k+7)^2\cos(k+7)\beta-(k+6)^2\cos(k+6)\beta+3\Big((k+5)^2\cos(k+5)\beta-(k+4)^2\cos(k+4)\beta\Big)+$$

$$+3\Big((k+3)^2\cos(k+3)\beta-(k+2)^2\cos(k+2)\beta\Big)+(k+1)^2\cos(k+1)\beta-k^2\cos k\beta\Big\}\;.$$

. . . .

$$S_k^m=2^m\Big(b_0+(2m+2k+1)c_0\Big)+a_1\Big\{\sin(2m+k+1)\beta-\sin(2m+k)\beta+$$

$$+\frac{m}{1}\Big(\sin(2m+k-1)\beta-\sin(2m+k-2)\beta\Big)+$$

$$+\frac{m(m-1)}{1.2}\Big(\sin(2m+k-3)\beta-\sin(2m+k-4)\beta\Big)+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\Big(\sin(2m+k-5)\beta-\sin(2m+k-6)\beta\Big)+\ldots+\sin(k+1)-\sin k\beta\Big\}+$$

$$+b_1\Big\{(2m+k+1)\sin(2m+k+1)\beta-(2m+k)\sin(2m+k)\beta+$$

$$+\frac{m}{1}\Big((2m+k-1)\sin(2m+k-1)\beta-(2m+k-2)\sin(2m+k-2)\beta\Big)+$$

$$+\frac{m(m-1)}{1.2}\Big((2m+k-3)\sin(2m+k-3)\beta-(2m+k-4)\sin(2m+k-4)\beta\Big)+\cdots$$

$$+(k+1)\sin(k+1)\beta-k\sin k\beta\Big\}+$$

$$+ c_1 \Big\{ (2m+k+1)^2 \sin(2m+k+1)\beta - (2m+k)^2 \sin(2m+k)\beta +$$

$$+ \frac{m}{1}\Big((2m+k-1)^2 \sin(2m+k-1)\beta - (2m+k-2)^2 \sin(2m+k-2)\beta\Big) +$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}\Big((2m+k-3)^2 \sin(2m+k-3)\beta - (2m+k-4)^2 \sin(2m+k-4)\beta\Big) + \ldots$$

$$+ (k+1)^2 \sin(k+1)\beta - k^2 \sin k\beta\Big)\Big\} +$$

$$+ a_2 \Big\{ \cos(2m+k+1)\beta - \cos(2m+k)\beta + \frac{m}{1}\Big(\cos(2m+k-1)\beta - \cos(2m+k-2)\beta\Big) +$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}\Big(\cos(2m+k-3)\beta - \cos(2m+k-4)\beta\Big) +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\Big(\cos(2m+k-5)\beta - \cos(2m+k-6)\beta\Big) + \ldots$$

$$+ \cos(k+1)\beta - \cos k\beta \Big\} +$$

$$+ b_2 \Big\{ (2m+k+1)\cos(2m+k+1)\beta - (2m+k)\cos(2m+k)\beta +$$

$$+ \frac{m}{1}\Big((2m+k-1)\cos(2m+k-1)\beta - (2m+k-2)\cos(2m+k-2)\beta\Big) +$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}\Big((2m+k-3)\cos(2m+k-3)\beta - (2m+k-4)\cos(2m+k-4)\beta\Big) + \ldots$$

$$+ (k+1)\cos(k+1)\beta - k\cos k\beta \Big\} +$$

$$+ c_2 \Big\{ (2m+k+1)^2 \cos(2m+k+1)\beta - (2m+k)^2 \cos(2m+k)\beta +$$

$$+ \frac{m}{1}\Big((2m+k-1)^2 \cos(2m+k-1)\beta - (2m+k-2)^2 \cos(2m+k-2)\beta\Big) +$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}\Big((2m+k-3)^2 \cos(2m+k-3)\beta - (2m+k-4)^2 \cos(2m+k-4)\beta\Big) + \ldots$$

$$+ (k+1)^2 \cos(k+1)\beta - k^2 \cos k\beta \Big\}$$

Приведенные здесь выражения для сумм S_k, S_k^2, S_k^3, $\cdots S_k^m$ показывают, что эти суммы лишь в том случае не будут зависеть от периода β, если значение скобок при коэффициентах a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 и c_2 будут обращаться в нуль. Таким образом мы получаем шесть уравнений, совместным решением которых может быть найден неизвестный период β. Принимая однако во внимание, что входящия в эти уравнения числа k и m могут иметь все возможныя значения, начиная с единицы и кончая каким угодно большим числом, мы приходим к заключению, что неизвестный период β должен быть таков, чтобы после подстановки его значеня в уравнения последние удовлетворялись при каком угодно значении чисел k и m. Это означает, что подстановка значения β должна обращать всю систему уравнений в тожества.

Итак, нам необходимо рассмотреть, при каких условиях может удовлетворяться система уравнений:

$$\sin(2m+k+1)\beta - \sin(2m+k)\beta + \frac{m}{1}\Big(\sin(2m+k-1)\beta - \sin(2m+k-2)\beta\Big) + \tag{29}$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}\Big(\sin(2m+k-3)\beta - \sin(2m+k-4)\beta\Big) + \ldots + \sin(k+1)\beta - \sin k\beta = 0$$

$$(2m+k+1)\sin(2m+k+1)\beta - (2m+k)\sin(2m+k)\beta +$$

$$+ \frac{m}{1}\Big((2m+k-1)\sin(2m+k-1)\beta - (2m+k-2)\sin(2m+k-2)\beta\Big) + \ldots$$

$$+ (k+1)\sin(k+1)\beta - k\sin k\beta = 0 \tag{30}$$

$$(2m+k+1)^2\sin(2m+k+1)\beta - (2m+k)^2\sin(2m+k)\beta +$$

$$+ \frac{m}{1}\Big((2m+k-1)^2\sin(2m+k-1)\beta - (2m+k-2)^2\sin(2m+k-2)\beta\Big) + \ldots$$

$$+ (k+1)^2\sin(k+1)\beta - k^2\sin k\beta = 0 \tag{31}$$

$$\cos(2m+k+1)\beta - \cos(2m+k)\beta + \frac{m}{1}\Big(\cos(2m+k-1)\beta - \cos(2m+k-2)\beta\Big) + \tag{32}$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}\Big(\cos(2m+k-3)\beta - \cos(2m+k-4)\beta\Big) + \ldots + \cos(k+1)\beta - \cos k\beta = 0$$

$$(2m+k+1)\cos(2m+k+1)\beta - (2m+k)\cos(2m+k)\beta +$$

$$+ \frac{m}{1}\Big((2m+k-1)\cos(2m+k-1)\beta - (2m+k-2)\cos(2m+k-2)\beta\Big) + \ldots$$

$$+ (k+1)\cos(k+1)\beta - k\cos k\beta = 0 \tag{33}$$

$$(2m+k+1)^2\cos(2m+k+1)\beta - (2m+k)^2\cos(2m+k)\beta +$$

$$+ \frac{m}{1}\Big((2m+k-1)^2\cos(2m+k-1)\beta - (2m+k-2)^2\cos(2m+k-2)\beta\Big) + \ldots$$

$$+ (k+1)^2\cos(k+1)\beta - k^2\cos k\beta = 0 \tag{34}$$

Преобразование при помощи Эйлеровых аналогий (29) и (32) из этих уравнений приводит их к следующему виду:

$$e^{(2m+k+1)i\beta}(1-e^{-i\beta})(1+e^{-2i\beta})^m - e^{-(2m+k+1)i\beta}(1-e^{i\beta})(1+e^{2i\beta})^m = 0 \tag{35}$$

$$e^{(2m+k+1)i\beta}(1-e^{-i\beta})(1+e^{-2i\beta})^m - e^{-(2m+k+1)i\beta}(1-e^{i\beta})(1+e^{2i\beta})^m = 0 \tag{36}$$

Из этих уравнений следует. что определяющими значение β условиями являются равенства

$$1-e^{-i\beta} = 0 \qquad\qquad 1-e^{i\beta} = 0$$

$$1+e^{-2i\beta} = 0 \qquad\qquad 1+e^{2i\beta} = 0$$

или равнозначущие им

$$1-\cos\beta=0 \qquad \sin\beta=0$$

$$1+\cos 2\beta=0 \qquad \sin 2\beta=0$$

Таким образом мы приходим к выводу, что значения периода β, удовлетворяющие уравнениям (29) и (32), суть

$$\beta=0 \qquad \beta=\frac{\pi}{2} \qquad \beta=\frac{3\pi}{2} \qquad \beta=\frac{5\pi}{2} \qquad \text{и т. д.}$$

Однако не все эти значения удовлетворяют условиям задачи, так как допущение, что $\beta=0$, обозначало бы, что у совсем не зависит от β, т. е. что мы имеем дело не с семейством парабол, а с одной параболой. Допустить же, что β равняется одному из чисел $\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \ldots$ нельзя потому, что вычисляемый по этим значениям период должен выразиться дробными числами, между тем как он, как определяющий собою число кривых в семействе, обязательно должен быть равен целому числу. Таким образом единственное значение β, которое мы можем принимать за решение нашей задачи, будет $\beta=\frac{\pi}{2}$, означающее, что семейство кривых состоит из четырех представителей.

Подстановка найденного значения β в уравнения (30), (31), (32) и (34) приводит их к виду:

$$(2m+k+1)-\frac{m}{1}\left(2m+k-1\right)+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(2m+k-3\right)-\ldots\pm(k+1)=0 \quad (37$$

$$(2m+k)-\frac{m}{1}\left(2m+k-2\right)+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(2m+k-4\right)-\ldots\pm k=0 \quad (38$$

$$2m+k+1)^2-\frac{m}{1}\left(2m+k-1\right)^2+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(2m+k-3\right)^2-\ldots\pm(k+1)^2=0 \quad (39$$

$$(2m+k)^2-\frac{m}{1}\left(2m+k-2\right)^2+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(2m+k-4\right)^2-\ldots\pm k^2=0 \quad (40$$

Легко убедиться, что равенства (37) и (38) суть на самом деле тожества, так как они представляют разложение в ряд тожеств

$$(2m+k+1)(1-1)^m-2m(1-1)^{m-1}=0$$

$$(2m+k)(1-1)^m-2m(1-1)^{m-1}=0$$

Что же касается равенств (39) и (40), то не трудно доказать, что их можно заменить выражениями

$$(2m+k+1)^2(1-1)^m+4m(2m+k+2)(1-1)^{m-1}-4\left\{\frac{m}{1}1^2-\frac{m(m-1)}{1.2}2^2+\right.$$

$$\left.\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}3^2-\ldots\pm\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}n^2\right\} \qquad (41$$

$$(2m+k)^2(1-1)^m+4m(m+k)(1-1)^{m-1}-4\left\{\frac{m}{1}1^2-\frac{m(m-1)}{1.2.}2^2+\right.$$

$$\left.+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}3^2-\ldots\pm\frac{m(m-1)\ldots.(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ n}n^2\right\} \tag{42}$$

Отсюда видно, что решение вопроса о том, при каких условиях удовлетворяется система условных уравнений (29)—(34), зависит от обращения в нуль выражения

$$\frac{m}{1}1^2-\frac{m(m-1)}{1.2}2^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}3^2-\frac{m(m-1)(m-2)m-3)}{1.2.3.4}4^2+\ldots$$

$$\pm\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ n}n^2 \tag{43}$$

Так как по условиям задачи m может быть только одним из целых чисел 1, 2, 3, . . . n и при том должно быть положительным, то, подставляя в выражение (43) вместо m последовательно числа 1, 2, 3, . . . n, можем убедиться, что, начиная с числа 3, равенство (43) удовлетворяется всяким целым и положительным числом, так как равенство (43) представляет разложение в ряд по квадратам целых чисел произведения

$$\frac{m}{1.2.3.4\ldots(n-1)}(m-3)(m-4)(m-5)\ldots(m-n)\Big(nm-(n+1)\Big)=0=$$

$$=\frac{m}{1}1^2-\frac{m(m-1)}{1.2}2^2+\frac{m(m--1)(m-2)}{1.2.3}3^2-\ldots$$

$$\pm\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ \ n}n^2 \tag{44}$$

которое должно обращаться в нуль, коль скоро m будет иметь значение одного из целых чисел 3, 4, . . . n.

Итак, на основании доказанного мы можем установить следующее правило: **если наблюдения дают такой ряд чисел, что вычисленные по ним суммы S_k, S_k^2, S_k^3,...S_k^m начинают с третьего порядка давать числа, составляющие арифметическую прогрессию, то такие наблюдения могут быть разбиты на четыре самостоятельные группы, в которых изменчивость чисел будет параболическая.**

В заключение этой главы рассмотрим еще один случай периодической функции, подобный только что рассмотренному. Пусть имеется семейство кривых вида

$$y=A+Be^{\alpha x}$$

и пусть мы переходим последовательно от одной кривой к другой так, что в конце перехода возвращаемся к начальной кривой. Очевидно, что значения ординат должны в этом случае получить периодическую изменчивость, так как они должны удовлетворять уравнению.

$$y=a_0+a_1\sin(\beta x+\varphi_1)+e^{\alpha x}\Big(b_0+b_1\sin(\beta x+\varphi_2)\Big) \tag{45}$$

Посмотрим, каким свойством будут обладать суммы, составленные по этим значениям ординат?

Составим снова выражения для разностей Δy. Эти разности будут таковы

$$\Delta y_1 = 2a_1 \sin\frac{1}{2}\beta\cos\left(\frac{3}{2}\beta+\varphi_1\right)+b_0(e^{\alpha}-1)e^{\alpha}+b_1\left(e^{\alpha}\sin(2\beta+\varphi_2)-\sin(\beta+\varphi_2)\right)e^{\alpha}$$

$$\Delta y_2 = 2a_1 \sin\frac{1}{2}\beta\cos\left(\frac{5}{2}\beta+\varphi_1\right)+b_0(e^{\alpha}-1)e^{2\alpha}+b_1\left(e^{\alpha}\sin(3\beta+\varphi_2)-\sin(2\beta+\varphi_2)\right)e^{2\alpha}$$

. . . .

$$\Delta y_k = 2a_1 \sin\frac{1}{2}\beta\cos\left(\frac{2k+1}{2}\beta+\varphi_1\right)+b_0(e^{\alpha}-1)e^{k\alpha}+b_1\left(e^{\alpha}\sin(k+1)\beta+\varphi_2)-\sin(k\beta+\varphi_2)\right)e^{k}$$

На основании этих равенств имеем

$$S_1 = 4a_1 \sin\frac{1}{2}\beta\cos\beta\cos\left(\frac{5}{2}\beta+\varphi_1\right)+b_0(e^{\alpha}-1)(e^{2\alpha}+1)e^{\alpha}+$$

$$+b_1 e^{\alpha}\left\{e^{2\alpha}\left(e^{\alpha}\sin(4\beta+\varphi_2)-\sin(3\beta+\varphi_2)\right)+e^{\alpha}\sin(2\beta+\varphi_2)-\sin(\beta+\varphi_2)\right\}$$

$$S_2 = 4a_1 \sin\frac{1}{2}\beta\cos\beta\cos\left(\frac{7}{2}\beta+\varphi_1\right)+b_0(e^{\alpha}-1)(e^{2\alpha}+1)e^{2\alpha}+$$

$$+b_1 e^{2\alpha}\left\{e^{2\alpha}\left(e^{\alpha}\sin(5\beta+\varphi_2)-\sin(4\beta+\varphi_2)\right)+e^{\alpha}\sin(3\beta+\varphi_2)-\sin(2\beta+\varphi_2)\right\}$$

$$S_3 = 4a_1 \sin\frac{1}{2}\beta\cos\beta\cos\left(\frac{9}{2}\beta+\varphi_1\right)+b_0(e^{\alpha}-1)(e^{2\alpha}+1)e^{3\alpha}+$$

$$+b_1 e^{3\alpha}\left\{e^{2\alpha}\left(e^{\alpha}\sin(6\beta+\varphi_2)-\sin(5\beta+\varphi_2)\right)+e^{\alpha}\sin(4\beta+\varphi_2)-\sin(3\beta+\varphi_2)\right\}$$

. . . .

$$S_5 = 4a_1 \sin\frac{1}{2}\beta\cos\beta\cos\left(\frac{13}{2}\beta+\varphi_1\right)+b_0(e^{\alpha}-1)(e^{2\alpha}+1)e^{5\alpha}+$$

$$+b_1 e^{5\alpha}\left\{e^{2\alpha}\left(e^{\alpha}\sin(8\beta+\varphi_2)-\sin(7\beta+\varphi_2)\right)+e^{\alpha}\sin(6\beta+\varphi_2)-\sin(5\beta+\varphi_2)\right\}$$

$$S_6 = 4a_1 \sin\frac{1}{2}\beta\cos\beta\cos\left(\frac{15}{2}\beta+\varphi_1\right)+b_0(e^{\alpha}-1)(e^{2\alpha}+1)e^{6\alpha}+$$

$$+b_1 e^{6\alpha}\left\{e^{2\alpha}\left(e^{\alpha}\sin(9\beta+\varphi_2)-\sin(8\beta+\varphi_2)\right)+e^{\alpha}\sin(7\beta+\varphi_2)-\sin(6\beta+\varphi_2)\right\}$$

и т. д.

Рассматривая суммы S_1 и S_5, S_2 и S_6, S_3 и S_7 и т. д. мы можем видеть, что, если $\beta = \frac{\pi}{2}$, то отношение.

$$\frac{S_5}{S_1} = \frac{S_6}{S_2} = \frac{S_7}{S_3} = \ldots = e^{4\alpha} = \text{постоянному числу} \qquad (46)$$

Легко убедиться, что таким же свойством будут обладать те же члены и в рядах сумм второго, третьего, четвертого и вообще какого угодно высшего порядка. В самом деле, например,

$$S_1^2 = S_3 + S_1 \quad \text{и} \quad S_5^2 = S_7 + S_5$$

Но $S_7 = e^{4\alpha} S_3$ и $S_5 = e^{4\alpha} S_1$ на основании соотношения (46); а потому

$$S_5^2 = e^{4\alpha} (S_3 + S_1) = e^{4\alpha} S_1^2$$

Таким же образом найдем, что

$$S_6^2 = e^{4\alpha} S_2^2$$

$$S_7^2 = e^{4\alpha} S_3^2$$

и следовательно, вообще

$$\frac{S_5^2}{S_1^2} = \frac{S_6^2}{S_2^2} = \frac{S_7^2}{S_3^2} = \ldots = e^{4\alpha} = \text{постоянному числу} \qquad (47)$$

Применяя тот же способ доказательства последовательно к суммам третьего, четвертого и вообще какого угодно высшего порядка, мы убедимся окончательно, что указанное свойство сумм первого и второго порядка является свойством общим для сумм какого угодно порядка, так что на основании этого можно установить следующее правило: **если наблюдения дают такой ряд чисел, что составленные по ним суммы S_k, S_k^2, S_k^3,... S_k^m начинают обнаруживать с наинисшего порядка то свойство, что отношение $\frac{S_{k+4}^m}{S_k^m}$ для любого целого значения k и m остается равным одному и тому же постоянному числу, то такой ряд наблюдений распадается на четыре самостоятельные группы, в которых изменчивость чисел будет отвечать изменчивости членов геометрической прогрессии, увеличенных или уменьшенных на постоянное число.**

Чтобы на числовых примерах видеть приложение изложенного в настоящей главе анализа, обратимся к изучению соотношеиий, какие могут быть установлены между элементами планетных орбит в солнечной системе.

ГЛАВА VII.

Многие астрономы склонны думать, что соотношение, известное под названием закона Тициуса-Боде, имеет скорее случайный характер, чем служит намеком, хотя бы даже и отдаленным, на действительное соотношение, существующее между средними расстояниями планет от солнца. Но такой взгляд ошибочен. Соотношение, связывающее друг с другом большие полуоси всех планетных орбит, действительно существует, но только не в той форме, в какой дали его Тициус или Боде.

Мы легко найдем его, если обратим внимание на то, что кривая, вычерченная по большим полуосям, имеет явственно выраженную извилистость. Следовательно, мы можем поставить задачу отыскать периоды, управляющие изменчивостью членов ряда, и для этого поступить с ними так, как это было указано в главе второй, т. е. расположив элементы в ряд в порядке действительного распределения планет в солнечной системе, найти по ним сначала разности первого порядка, а потом подвергнуть эти разности суммированию через одну попарно. По найденным суммам следует затем найти суммы второго порядка и третьего порядка.

Проделав вычисления по указанным элементам классификации, мы тотчас же получим весьма интересный результат. Так как между Марсом и Юпитером находится кольцо астероидов, для которого приходится брать в основном ряду классификации лишь приближенное значение элемента, то вследствие этого в ряды классификации вносится некоторая неточность, от которой зависит форма выражения искомой законности. За такую величину на первых порах я принял число, равное 2,820. Это число составляет почти ровно половину суммы больших полуосей для орбит астероидов Туле и Эроса.

После того, как, оперируя с указанной приближенной величиной для большой полуоси планеты, заменяющей собою кольцо астероидов, я убедился, что связь между большими полуосями для всех планет на самом деле существует, я исправил число 2,820, заменив его числом 2,81518. Тогда закон, выражающий связь между большими полуосями планетных орбит, выступает во всей своей чарующей простоте. Чтобы убедиться в этом, нужно только просмотреть числа относящейся сюда таблицы I.

ТАБЛИЦА I.

Элементы классификации	Меркурий	Венера	Земля	Марс	Астероиды	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
Большая полуось орбит.	0,38712	0.72333	1,00000	1,52368	2,81518	5,20256	9,55475	19,21814	30,10957
Разности 1-го пор.	0,33621	0.27667	0,52368	1,29150	2,38738	4,35219	9.66339	10,89143	—
Суммы 1-го поряд.	0,85989	1,56817	2,91106	5,64369	12,05077	15,24362	—	—	—
Суммы 2-го поряд.	3,77095	7,21186	14,96183	20,88731	—	—	—	—	—
Суммы 3-го поряд.	18,73278	28,09917	—	—	—	—	—	—	—

Кроме указанного выше числа 2,81518, принятого за характеристику кольца астероидов, основной ряд ее не заключает в себе ни малейших приближений. Все числа этого ряда приняты астрономами и взяты мною из Gonnaissance des temps за 1917 год. Считаю необходимым однако отметить, что в классификации начинает обнаруживаться невязка величиною в две единицы в пятом десятичном знаке, которая исчезает, если для Меркурия мы поставим в основной ряд классификации не число 0,38710, которое принимается астрономами, а число 0,38712. Таким образом исчезание в классификации невязки при числе 0,38712 как бы указывает нам на то, что это число наиболее достоверно.

Законность, которую констатирует нам таблица I, заключается в том, что

1. суммы третьего порядка суть числа кратные от одного и того же числа 9,36639;

2. второй член в ряду этих сумм относится к первому, как число 3 относится к числу 2. Это значит, что большие полуоси всех планетных орбит в солнечной системе связаны друг с другом следующим соотношением:

$$\left\{(a_3-a_2)+3(a_5-a_4)+3(a_7-a_6)+(a_9-a_8)\right\}:\left\{(a_2-a_1)+3(a_4-a_3)+3(a_6-a_5)+(a_8-a_7)\right\}=3:2 \qquad (48)$$

О чем же говорит нам это соотношение?

Принимая во внимание теоремы, доказанные в конце шестой главы, мы имеем право утверждать, что соотношение (48) представляет собою математическое выражение связи между коэффициентами в уравнениях четырех парабол, каждое из которых может быть представлено в виде уравнения

$$a = A + Bz + Cz^2 \qquad (49)$$

где буква z в правой части равенства обозначает одно из порядковых чисел 1, 2, 3, 4,...и т. д. Простейшее средство убедиться в этом есть дополнение основного ряда таблицы I числами, полученными на основании того свойства сумм третьего порядка, что они являются кратными от числа 9,36639. Поэтому, если в последнем горизонтальном ряде таблицы I мы поставим в колонке третьей число 4×9,36639, в колонке четвертой число 5×9,36639, в колонке пятой число 6×9,36639 и т. д., то вслед за значением большой полуоси для Нептуна получим следующие числа:

$$\begin{array}{lll}
a_{10} = 30{,}89914 & a_{15} = 64{,}46194 & a_{20} = 169{,}79078 \\
a_{11} = 30{,}70873 & a_{16} = 103{,}35169 & a_{21} = 261{,}19072 \\
a_{12} = 53{,}16081 & a_{17} = 159{,}29734 & a_{22} = 235{,}29298 \\
a_{13} = 82{,}27029 & a_{18} = 145{,}94435 & a_{23} = 169{,}76605 \\
a_{14} = 77{,}81307 & a_{19} = 110{,}81438 & a_{24} = 252{,}47808
\end{array}$$

Если на плоскости координатных осей мы нанесем точки, отвечающие величине полученных значений полуосей, приняв их за ординаты, а вдоль оси абсцисс отложим одинаковой величины отрезки, отвечающие местам, занимаемым в солнечной системе действительными или предполагаемыми планетами, и соединим концы ординат непрерывной кривой линией, то мы найдем, что она представляет последовательный переход по точкам, расположенным на ветвях четырех отдельных парабол. Аналитически мы можем убедиться в этом следующим образом.

Разобьем основной ряд таблицы I с включенными в него дополнительными членами на группы, отнеся

к первой группе полуоси . . . a_1, a_5, a_9, a_{13}, a_{17}, a_{21}

к второй группе полуоси . . . a_2, a_6, a_{10}, a_{14}, a_{18}, a_{22}

к третьей группе полуоси . . a_3, a_7, a_{11}, a_{15}, a_{19}, a_{23}

к четвертой группе полуоси . a_4, a_8, a_{12}, a_{16}, a_{20}, a_{24}

и отыщем по ним конечные разности первого и второго порядка. Относящаяся сюда таблица II дает нам представление о значении этих разностей.

ТАБЛИЦА II.

Группа	Элементы классификации	a_1	a_5	a_9	a_{13}	a_{17}	a_{21}
I	Большая полуось орб.	0,38712	2,81518	30,10957	82,27029	159,29734	261,19072
	Разности 1-го порядка	2,42806	27,29439	52,16072	77,02705	101,89338	
	Разности 2-го порядка	24,86633	24,86633	24,86633	24,86633		
Группа	Элементы классификации	a_2	a_6	a_{10}	a_{14}	a_{18}	a_{22}
II	Большая полуось орб.	0,72333	5,20256	30,89914	77,81307	145,94435	235,29298
	Разности 1-го порядка	4,47923	25,69658	46,91393	68,13128	89,34863	
	Разности 2-го порядка	21,21735	21,21735	21,21735	21,21735		
Группа	Элементы классификации	a_3	a_7	a_{11}	a_{15}	a_{19}	a_{23}
III	Большая полуось орб.	1,00000	9,55475	30,70873	64,46194	110,81438	169,76605
	Разности 1-го порядка	8,55475	21,15398	33,75321	46,35244	58,95167	
	Разности 2-го порядка	12,59923	12,59923	12,59923	12,59923		
Группа	Элементы классификации	a_4	a_8	a_{12}	a_{16}	a_{20}	a_{24}
IV	Большая полуось орб.	1,52368	19,21814	53,16081	103,35169	169,79078	252,47808
	Разности 1-го порядка	17,69446	33,94267	50,19088	66,43909	82,68730	
	Разности 2-го порядка	16,24821	16,24821	16,24821	16,24821		

Рассматривая по отдельным группам ряды цыфр в таблице II, можно видеть, что разности второго порядка повсюду оказываются постоянными числами. Так как это может быть только в том случае, если функция будет целой и при том второй степени, то отсюда мы и можем заключить, что для любой из групп, входящей в состав таблицы II, связь между величинами a и числом z, определяющим место планеты в группе, на самом деле выражается указанным выше уравнением (49).

Принимая это во внимание, вычислим значение коэффициентов A, B и C, характеризующих каждую группу. Так как по свойству конечных разностей для данного случая значение разностей второго порядка вообще должно равняться помноженному на число 32 коэффициенту C, а значение первых членов в ряду разностей первого порядка соответственно равняться:

в первой группе . . . . $4B_1 + 24C_1$
во второй „ . . . . $4B_2 + 32C_2$
в третьей „ . . . . $4B_3 + 40C_3$
„ четвертой „ . . . . $4B_4 + 48C_4$

то на основании этого имеем такие значения коэффициентов B и C для каждой группы:

для первой группы . . . . . $B_1 = -4{,}0554228$ $C_1 = 0{,}7770729$
для второй группы . . . . . $B_2 = -4{,}1845301$ $C_2 = 0{,}6630422$
для третьей группы . . . . . $B_3 = -1{,}7985715$ $C_3 = 0{,}3937259$
для четвертой группы . . . . $B_4 = -1{,}6694642$ $C_4 = 0{,}5077566$

Зная же коэффициенты B и C, по первым рядам находим значения и коэффициента A для каждой группы. Эти значения таковы:

для первой группы . . . $A_1 = 3{,}6654712$
для второй группы . . . $A_2 = 6{,}4402214$
для третьей группы . . $A_3 = 2{,}8521814$
для четвертой группы . . $A_4 = 0{,}0774312$

Таким образом оказывается, что восемь больших планет солнечной системы составляют четыре самостоятельные группы, при чем одну группу составляют Меркурий и Нептун, вторую группу—Венера и Юпитер, третью группу—Земля и Сатурн, и, наконец, четвертую группу—Марс и Уран. В каждой из этих групп большие полуоси орбит могут быть вычислены по уравнениям:

в первой группе . . . $a=3{,}6654712-4{,}0554228z+0{,}7770729z^2$ (50)
во второй группе . . $a=6{,}4402214-4{,}1845301z+0{,}6630422z^2$ (51)
в третьей группе . . $a=2{,}8521814-1{,}7985715z+0{,}3937259z^2$ (52)
в четвертой группе . $a=0{,}0774312-1{,}6694642z+0{,}5077566z^2$ (53)

а все полуоси вместе связаны друг с другом соотношением:

$$\left\{(a_3-a_2)+3(a_5-a_4)+3(a_7-a_6)+(a_9-a_8)\right\}:\left\{(a_2-a_1)+3(a_4-a_3)+3(a_6-a_5)+(a_8-a_7)\right\}=3:2$$

которое приводилось уже и раньше. Так как нам не раз придется говорить ниже об указанных здесь группах планет, то условимся называть первую группу группой Нептуна, вторую—группой Юпитера, третью—группой Сатурна и последнюю—группой Урана.

Вышеприведенный анализ так прост, что сделанные на основании его выводы едва ли могут хоть в ком нибудь возбудить сомнение. Научное же значение их бесспорно, так как ими дается освещение одному из трудных вопросов теоретической механики относительно движения тел, тяготеющих к одному общему центру и друг к другу по закону всемирного тяготения. В виду этого весьма важно было выяснить, не существует ли для планет солнечной системы соотношения также и между малыми полуосями их орбит. Очевидно, что если бы на самом деле удалось найти такое соотношение, то тем самым был бы установлен закон, связующий друг с другом второй элемент планетных орбит—их эксцентрицитеты.

После того, как была выше подробно об'яснена система классификации, я считаю лишним возвращаться к этому об'яснению. Поэтому я прямо приведу здесь таблицу III, составленную по величине малых полуосей, вычисленных мною по большим осям и эксцентрицитетам. Так как нахождение всех членов в рядах классификации и здесь оказывается невозможным без знания вспомогательной величины, характеризующей кольцо астероидов, то за такую величину я принял число 2,80645. С таким числом классификация дает следующий результат.

ТАБЛИЦА III

Элементы классификации	Меркурий	Венера.	Земля	Марс	Астероиды	Юпитер	Сатурн	Уран	Неп- ту
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9
Малая полуось орбиты	0,37881	0,72331	0,99986	1,51703	2,80645	5,19648	9,53981	19,19749	30,108
Разности 1-го пор.	0,34450	0,27655	0,51717	1,28942	2,39003	4,34333	9,65768	10,91087	
Суммы 1-го пор.	0,86167	1,56597	2,90720	5,63275	12.04771	15,25420			
Суммы 2-го пор.	3,76887	7,19872	14,95491	20,88695					
Суммы 3-го пор.	18,72378	28,08567							

В отношении приведенной таблицы необходимо прежде всего отметить, что и здесь происходит невязка в ряду сумм третьего порядка величиной в две единицы в пятом десятичном знаке, когда для Меркурия принимается малая полуось его орбиты равной 0,37883. Так как невязка исчезает, когда эту полуось принимают равной 0,37881, то, повидимому, это число и следует принимать за величину малой полуоси орбиты Меркурия.

Из таблицы III видно, что между малыми полуосями планетных орбит существует совершенно такое же соотношение, какое было установлено выше для больших полуосей, так что и здесь имеет место уравнение (48), если только мы заменим в нем полуоси a полуосями b. В самом деле, стоящие в ряду сумм третьего порядка члены суть числа кратные от числа 9,36189 и они относятся друг к другу, как числа 3 и 2. Следовательно, все те выводы касательно распределения планет солнечной системы по четырем группам, какие мы сделали выше на основании изучения соотношений между большими полуосями, получают для себя подтверждение и здесь. По методу, тожественному с предыдущим, я нашел, что величина малой полуоси может быть вполне точно вычислена по следующим формулам:

для группы Нептуна $b = 3{,}6585047 - 4{,}0570156z + 0{,}7773209z^2$ (54)

для группы Юпитера $b = 6{,}4464646 - 4{,}1882001z + 0{,}6633116z^2$ (55)

для группы Сатурна $b = 2{,}8461194 - 1{,}7941657z + 0{,}3929153z^2$ (56)

для группы Урана $b = 0{,}0581596 - 1{,}6629812z + 0{,}5069247z^2$ (57)

Остановимся на некоторое время на этих уравнениях.

Рассматривая совокупности уравнений (50)—(53) и (54)—(57), легко заметить, что в группах Нептуна и Юпитера заложена тенденция к увеличению малой полуоси, тогда как в группах Сатурна и Урана проявляется стремление к уменьшению ее. И действительно, если бы по уравнениям для больших и малых полуосей мы вычислили те значения z, при которых большие и малые полуоси делаются равными, то нашли бы, что этому условию удовлетворяют

в группе Нептуна $z_1 = 9{,}4083$ $z_2 = -2{,}9857$,
а в группе Юпитера $z_1 = 11{,}6303$ $z_2 = 1{,}9925$.

Что касается групп Урана и Сатурна, то вычисление показывает, что здесь орбита никогда не могла бы сделаться круговой. Какое значение имеет это обстоятельство, мы увидим ниже.

Так как кривые, выражаемые уравнениями (50)—(53), составляют семейство кривых, а кривые, выражаемые уравнениями (54)—(57), составляют другое семейство, то каждую совокупность этих уравнений мы можем заменить одной формулой. Эта возможность является следствием того, что как постоянные коэффициенты, так и коэффициенты при z и z^2 должны удовлетворять строго уравнениям:

$$A = A_0 + B_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) + C_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) = A_0 + D_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}(z + z_0)\right)$$

$$B = A_1 + B_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) + C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) = A_1 + D_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}(z + z_1)\right)$$

$$C = A_1 + B_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) + C_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) = A_2 + D_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}(z + z_2)\right)$$

Поэтому для любой планетной орбиты как действительной, так и предполагаемой, большая и малая полуоси могут быть вычислены по одной и той же формуле, имеющей следующий вид:

$$y = A_0 + B_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) + C_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) + \left(A_1 + B_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) + C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right)z + \left(A_2 + B_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) + C_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right)z^2 \qquad (58)$$

или же по равнозначущей ей формуле

$$y = A_0 + D_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}(z + z_0)\right) + \left(A_1 + D_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}(z + z_1)\right)\right)z + \left(A_2 + D_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}(z + z_2)\right)\right)z^2 \qquad (59)$$

Эти формулы и должны заменить собою в астрономии формулу, известную под названием закона Тициуса-Боде. По формулам (58) и (59) полуоси вычисляются вполне точно до какого угодно десятичного знака, т. е с такою точностью, которая может удовлетворить самого требовательного астронома. Все зависит от того, с каким числом десятичных знаков будут взяты элементы основного ряда в классификациях I и III. Точность до шестого десятичного знака достигается при помощи следующих значений коэффициентов:

для больших полуосей

A_0 = 3,2588263	A_1 = —2,9269972	A_2 = 0.5853994
B_0 = 0,4066449	B_1 = —1,1284257	B_2 = 0,1916735
C_0 = —3.1813951	C_1 = 1,2575330	C_2 = --0,0776428
D_0 = 3,206140	D_1 = --1,687444	D_2 = 0,206802
z_0 = —0,91923	z_1 = —0,53369	z_2 = —0,24502

для малых полуосей

A_0 = 3,2523121	A_1 = —2,9255906	A_2 = 0.5851181
B_0 = 0,4061926	B_1 = —1,1314250	B_2 = 0,1922028
C_0 = —3,1941525	C_1 = 1,2626095	C_2 = —0,0781935
D_0 = 3,219895	D_1 = —1,695377	D_2 = 0.207500
z_0 = —0,91948	z_1 = —0,53485	z_2 = —0,24598

ГЛАВА VIII.

Когда мною найдены были для планетных орбит соотношения, связующие их большие и малые полуоси, в моем уме создалась уверенность в том, что и между остальными элементами этих орбит существуют также некоторые соотношения и что при некоторой настойчивости они могут быть открыты. Эта уверенность не оказалась ошибочной, но для этого действительно потребовалась большая настойчивость.

Источник всех затруднений, которые я встречал на своем пути, заключался в незнании того, какими элементами следует охарактеризовывать тот эквивалент, который заменял мне в моих классификациях кольцо астероидов. Не будь этого, задача решалась бы легко, просто и изящно. Но когда в руках исследователя находился только один критерий, по которому он мог судить о правильности или неправильности найденного результата, а именно, удовлетворяется или не удовлетворяется требование, чтобы сумма однозначущих коэффициентов в уравнениях, относящихся к группам Нептуна и Сатурна, была бы равна сумме таковых же коэффициентов в уравнениях для групп Урана и Юпитера и чтобы, во вторых, разность тех же коэффициентов в уравнениях для первой и второй групп в точности равнялась бы разности подобных же коэффициентов для четвертой и третьей группы,—решение задачи крайне осложнялось. В разработке вопроса приходилось идти медленными шагами и путем множества последовательных приближений постепенно выяснять, с каким значением искомых элементов решение задачи получает наибольшую достоверность. Порядок изучения каждой из получаемых таким образом таблиц состоял в том, что я прежде всего старался отыскать, не находятся ли в какой либо связи друг с другом элементы классификации. А когда это удавалось сделать, я приступал к отысканию уравнения, выражающего эту связь, и находил значение постоянных коэффициентов его. Знание же коэффициентов тотчас решало вопрос, удовлетворяет ли найденное решение условиям задачи или нет. Покажу это на частных примерах.

Предположим, что в классификации по долготам перигелия на пятом месте в основном ряду стоит число 61,31227. Вычисляя с помощью этого числа все элементы классификации до сумм второго порядка включительно, получим ряды цифр, данные в таблице IV.

ТАБЛИЦА IV.

Элементы классификации	Меркурий π_1	Венера π_2	Земля π_3	Марс π_4	Астероиды π_5	Юпитер π_6	Сатурн π_7	Уран π_8	Нептун π_9
Долгота перигелия	75,89717	130,14057	101,21870	334,21833	61,31227	12,72097	91,09821	171,54869	46,72736
Разности 1-го порядка	54,24340	— 28,92187	232,99963	—272,90606	—48,59130	78,37724	80,45048	—124,82133	
Суммы 1-го порядка	287,24303	—301,82793	184.40833	—194,52882	31,85918	—46,44409			
Суммы 2-го порядка	471,65136	—496,35675	216,26751	—240,97291					

Рассматривая их внимательно, легко обнаружим, что в ряду сумм второго порядка сумма первых двух членов равняется сумме двух остальных, и что сама эта сумма равняется сумме четырех членов, стоящих в ряду сумм первого порядка, начиная с третьего члена. С другой стороны, легко убедиться, что сумма первых двух членов, стоящих в ряду сумм первого порядка, равна сумме членов пятого и шестого. Казалось бы, что закономерность здесь выражена так ясно, и в такой выпуклой форме, что совершенно нет места сомнению в том, что величина элемента и место, занимаемое планетою в своей группе, связаны друг с другом линейной зависимостью.

В самом деле, на основании, например, свойства, отмеченного в последнем горизонтальном ряду таблицы IV, мы можем написать следующее равенство:

$$\Delta\pi_6+\Delta\pi_5+2(\Delta\pi_4+\Delta\pi_3)+\Delta\pi_2+\Delta\pi_1=$$

$$=\Delta\pi_8+\Delta\pi_7+2(\Delta\pi_6+\Delta\pi_5)+\Delta\pi_4+\Delta\pi_3$$

После сокращения подобных членов это равенство приводится к тому, что

$$\pi_5-\pi_1=\pi_9-\pi_5$$

или иначе

$$\pi_1+\pi_9=2\pi_5 \qquad (60)$$

что, как известно, выражает свойство прямой линии.

Если бы мы расширили основной ряд таблицы IV в предположении, что указанная особенность членов ряда сумм второго порядка составляет общее свойство всех членов этого ряда, то мы получили бы еще три следующие соотношения

$$\pi_2 + \pi_{10} = 2\,\pi_6 \tag{61}$$

$$\pi_3 + \pi_{11} = 2\,\pi_7 \tag{62}$$

$$\pi_4 + \pi_{12} = 2\,\pi_8 \tag{63}$$

Все, полученные таким способом, соотношения выражали бы нам тот закон, что в солнечной системе планеты составляют четыре отдельные группы и что в каждой группе долготы перигелия связаны с местом, занимаемым планетой в этой группе, линейной зависимостью. Что же касается того, каким именно способом распределяются планеты по этим группам, то, всматриваясь ближе в то, между какими планетами устанавливается связь соотношениями (60)—(63), без всякого труда найдем, что классифицирование планет по долготам перигелия производит распределение их в точности на те же группы, какие найдены были выше на основании соотношений между большими и малыми полуосями планетных орбит.

Итак, искомое решение задачи как будто бы найдено. Но если обратиться к тому, какое значение мы должны приписать коэффициентам этих линейных зависимостей, то увидим, что оно никоим образом не может нас удовлетворять. В самом деле, вычисление показывает, что, если бы элементы планет данной группы действительно составляли ряд членов арифметической прогрессии, то первый член и разность этой прогрессии составляли бы такие числа:

в группе Нептуна . . . . $A_1 = 79{,}543396$ $B_1 = -\ 3{,}646226$

„ „ Юпитера . . . $A_2 = 188{,}850370$ $B_2 = -29{,}354900$

„ „ Сатурна . . . . $A_3 = 108{,}809068$ $B_3 = -\ 2{,}530123$

„ „ Урана . . . . . $A_4 = 496{,}887970$ $B_4 = -40{,}667410$

Так как $(A_1 + A_3)$, равно как $(B_1 + B_3)$ не равны соответственно $(A_2 + A_4)$ и $(B_2 + B_4)$, то отсюда делаем вывод, что найденное как бы решение задачи не верно, т.е. что нельзя допускать, что элемент и место, занимаемое планетой в своей группе, связаны друг с другом линейной зависимостью.

Перейдем теперь к другому примеру. Пусть основной ряд классификации составляют углы наклона перигелия, взятые с таким знаком, какой имеет синус от долготы перигелия, и допустим, что на пятом месте в этом ряду стоит число 61,21945. В таком случае элементы классификации дают нам следующую таблицу (см. таблицу V, на стр. 99).

В этой таблице числа, стоящие в ряду сумм первого порядка, обладают тем свойством, что отношение пятого члена к первому и шестого к второму оказываются одинаковыми. В самом деле

$$\frac{128{,}94896}{130{,}60071} = 0{,}9873525 \text{ и } \frac{114{,}45687}{115{,}92299} = 0{,}9873525$$

На основании этого мы можем написать такие равенства:

$$\varphi_9 - \varphi_8 + \varphi_7 - \varphi_6 = \mathrm{n}\,(\varphi_5 - \varphi_4 + \varphi_3 - \varphi_2)$$

$$\varphi_8 - \varphi_7 + \varphi_6 - \varphi_5 = \mathrm{n}\,(\varphi_4 - \varphi_3 + \varphi_2 - \varphi_1)$$

а складывая их, получим равенство,

$$\varphi_9 - \varphi_5 = n(\varphi_5 - \varphi_1)$$

которое говорит нам, что Меркурий, Нептун и кольцо астероидов принадлежат к одной и той же группе.

ТАБЛИЦА V.

Элементы классификации	Меркурий	Венера	Земля	Марс	Астероиды	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9
Углы наклона перигелия	75,89717	49,85943	78,78130	—25,78167	61,21945	12,72097	88,90179	8,45131	46,72736
Разности 1-го порядка	—26,03774	28,92187	—104,56297	87,00112	—48,49848	76,18082	—80,45048	38,27605	
Суммы 1-го порядка	—130,60071	115,92299	—153,06145	163,18194	—128,94896	114,45687			

Подобные же равенства для других групп планет мы получим, если допустим, что из третьего и четвертого членов, стоящих в ряду сумм первого порядка, могут быть образованы члены седьмой и восьмой по тому же закону, по какому составлены члены пятый и шестой из членов первого и второго, и что такой способ нахождения новых членов ряда может быть распространен, как угодно, далеко. Но в таком случае на весь ряд мы имеем право распространить действие теоремы, доказанной в самом конце шестой главы. Теорема эта говорит, что, если имеется семейство кривых вида,

$$y = A + Be^{\alpha x}$$

состоящее из четырех представителей, то в ряду сумм первого порядка отношение членов

$$\frac{S_{k+4}}{S_k} = e^{4\alpha} = \text{постоянному числу}$$

при любом значении k. Так как таблица V выявляет как раз это именно свойство своих членов, то отсюда непосредственно и вытекает заключение, что элементы, к которым относится эта таблица, должны быть рассматриваемы нами, как значения функции, написанной в форме уравнения

$$\varphi = A + Be^{\alpha z} \qquad (64)$$

Можно было бы убедиться и иным путем в том, что основной ряд таблицы V может быть разбит на четыре группы чисел, состоящих из членов геометрической прогрессии, увеличенных или уменьшенных на постоянное число. Но я не буду представлять этих доказательств, так как для наших целей они мало полезны. Как бы ни были убедительны эти доказательства, но, оценивая их с точки зрения того критерия, о котором было сказано выше, мы всетаки вынуждаемся заключить, что подобное решение нашего вопроса должно быть отвергнуто, как неверное. В самом деле, вычисление показывает, что, если бы формула (64) могла

ТАБЛИЦА VI.

Элементы классификации	Меркурий	Венера	Земля	Марс	Астероиды	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Долгота перигелия . . .	75,89717	130,14057	101,21870	334,21833	297,20667	12,72097	91,09821	171,54869	46,72736
Разности 1-го порядка .	54,24340	—28,92187	232,99963	—37,01166	—284,48570	78,37724	80,45048	—124,82133	
Суммы 1-го „ .	287,24303	—65,93353	—51,48607	41,36558	—204,03522	—46,44409			
„ 2-го „ .	235,75696	—24,56795	—255,52129	—5,07851					
„ 3-го „ .	—19,76433	—29,64646							
Долгота восходящего узла	47.14474	75,78809	0,00000	48,78670	103,45780	99.44341	112,79041	73.47711	130,68139
Разности 1-го порядка .	28,64335	—75,78809	48,78670	54,67110	—4,01439	13.34700	—39,31330	57,20428	
Суммы 1-го „ .	77,43005	—21,11699	44,77231	68,01810	—43.32769	70,55128			
„ 2-го „ .	122,20236	46,90111	1,44462	138,56938					
„ 3-го „ .	123,64698	185,47049							
Наклонность к эклиптике	7,03014	3,39364	0,00000	1.85030	1,411695	1.30874	2,49252	0,77246	1,77924
Разности 1-го порядка .	—3,63650	—3,39364	1,85030	—0,438605	—0,102955	1,18378	—1,72006	1,00678	
Суммы 1-го „ .	—1,78620	—3,832245	1,747345	0,745175	—1.823015	2.19056			
„ 2-го „ .	—0,038855	—3,087070	—0,075670	2,935735					
„ 3-го „ .	—0,114525	—0,151335							

быть применима к данному случаю, то коэффициенты этой формулы должны были бы иметь следующие значения:

для группы Нептуна . . . . $A_1 = -1086,403$ $B_1 = 1177,2$
„ „ Юпитера . . . $A_2 = -2851,640$ $B_2 = 2939,1$
„ „ Сатурна . . . . $A_3 = 850,181$ $B_3 = -781,7$
„ „ Урана . . . . . $A_4 = 2622,818$ $B_4 = -2683,3$

Совершенно очевидно, что выписанные здесь значения коэффициентов далеки от того, чтобы сумма их для первой и третьей групп была равна сумме таковых же коэффициентов для второй и четвертой группы, а между тем это должно было бы быть, если бы формула (64) выражала собою правильное решение нашего вопроса.

Все неудачи подобного рода,—а их было очень много,—имели однако же для меня то значение, что я с самых разнообразных сторон извлекал доказательства того факта, что существующие в солнечной системе планеты составляют четыре отдельные группы, при чем распределение их по группам всегда получается таким, какое мы нашли на основании классификаций по большим и малым полуосям. В виду этого я решил испытать, к каким результатам приводит допущение параболической формы связи между величиною элемента и местом, занимаемым планетою в своей группе. Оказалось, что все допущения подобного рода приводят к уравнениям, коэффициенты которых удовлетворяют основному критерию. Но очевидно, что эта множественность как бы решений нашей задачи оставляет открытым вопрос, какое же из них мы должны принять за правильное. Лишь в силу соображений, о которых будет говориться в следующей главе, я полагаю, что наиболее вероятным будет следующее решение.

Поставим на пятое место в классификациях: по долготе перигелия—число 297,20667, по долготе восходящего узла—число 103,45780 и, наконец, по наклонностям к эклиптике—число 1,411695. В таком случае характеристикой наших классификаций явятся ряды цифр, данных в таблице VI на странице 100.

Обращаясь в этой таблице к значению членов, стоящих в ряду сумм третьего порядка, видим, что в классификации по долготам перигелия эти члены оказываются числами кратными от числа —9,88216, в следующей классификации—числами кратными от числа 61,82350 и только в классификации по наклонностям имеем как бы ряд членов арифметической прогрессии с разностью —0,036810. Пользуясь этим свойством сумм третьего порядка, мы можем, далее, пополнить основные ряды классификаций новыми членами, которые после распределения их по группам можно найти в относящейся сюда таблице VII (см. стр. 102).

Так как в силу свойства сумм третьего порядка в таблице VI члены основных рядов таблицы VII по своему геометрическому смыслу суть ординаты некоторых парабол, отвечающие тем значениям абсцисс, которые указаны в заголовке таблицы непосредственно над ними, то мы и можем воспользоваться рядами цифр таблицы VII для того, чтобы вычислить коэффициенты в уравнениях этих парабол. Поступая так, как это было показано в главе VII, мы получим для этих коэффициентов следующие значения

ТАБЛИЦА VII.

Элементы классификации.	Группа Нептуна.				Группа Юпитера.			
	1	5	9	13	2	6	10	14
Долгота перигелия	75,89717	297,20667	46,72736	−675,54076	130,14057	12,72097	386,30480	1250,89206
Разности 1-го порядка	221,30950	—250,47931	—722,26812		—117,41960	373,58383	864,58726	
Разности 2-го порядка	—471,78881	—471,78881			491,00343	491,00343		
Долгота восходящего узла	47,14474	103,45780	130,68139	128,81551	75,78809	99,44341	459,17176	1154,97314
Разности 1-го порядка	56,31306	27,22359	—1,86588		23,65532	359,72835	695,80138	
Разности 2-го порядка	—29,08947	—29,08947			336,07303	336,07303		
Наклонность к эклиптике	7,030140	1,411695	1,779240	8,132775	3.39364	1,30874	5,20984	15,09694
Разности 1-го порядка	—5,618445	0,367545	6,353535		—2,08490	3,90110	9,88710	
Разности 2-го порядка	5,98599	5,98599			5,98600	5,98600		

Элементы классификации.	Группа Сатурна.				Группа Урана			
	3	7	11	15	4	8	12	16
Долгота перигелия	101,21870	91,09821	513,23801	1367,63810	334,21833	171,54869	—521,65290	−1745,38644
Разности 1-го порядка	—10,12049	422,13980	854,40009		—162,66964	—693,20159	−1223,73354	
Ранности 2-го порядка	432,26029	432,26029			—530,53195	—530,53195		
Долгота восходящего узла	0,00000	112,79041	501,96433	1167,52176	48,78670	73,47711	9,38853	−143,47904
Разности 1-го порядка	112,79041	389,17392	665,55743		24,69041	—64,08858	—152,86757	
Разности 2-го порядка	276,38351	276,38351			—88,77899	—88,77899		
Наклонность к эклиптике	0,00000	2,49252	—1,14819	—10,92213	1,85030	0,77246	—6,43862	—19,78294
Разности 1-го порядка	2,49252	—3,64071	—9,77394		—1,07784	—7,21108	—13,34432	
Разности 2-го порядка	—6,13323	—6,13323			—6.13324	—6,13324		

ТАБЛИЦА VIII.

Наименование элементов планетной орбиты	Группа Нептуна			Группа Юпитера		
	A_1	B_1	C_1	A_2	B_2	C_2
Долгота перигелия	—53,1472064	143,7877768	—14,7434003	372,9766563	—152,1057576	15,3438572
Долгота восходящего узла	28,5212457	19,5325404	—0,9090459	189,9878162	—78,1044276	10,5022822
Наклонность к эклиптике	9,3700636	—2,5269853	0,1870623	6,6808364	—2,0177231	0,1870623

Наименование элементов планетной орбиты	Группа Сатурна			Группа Урана		
	A_3	B_3	C_4	A_4	B_3	C_4
Долгота перигелия	392,4798837	—137,6114635	13,5081341	—33.6439789	158,2820708	—16,5791234
Долгота восходящего узла	96,7838714	—58,1722446	8,6369847	—64,6826991	39,4647234	—2,7743434
Наклонность к эклиптике	—5,8943242	2,5397657	—0,1916636	—3.2050970	2,0305035	—0,1916636

Не трудно убедиться, что находящиеся в этой таблице коэффициенты критерию строго удовлетворяют, а потому вычисление искомых элементов планетных орбит мы можем свести к вычислению только по одной формуле, вид которой нам уже известен из предыдущего, а, именно, по формуле

$$\psi = A_0 + B_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) + C_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) + \left(A_1 + B_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) + C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right) z +$$

$$+ \left(A_2 + B_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) + C_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\right) z^2 \tag{65}$$

где под буквой ψ мы должны разуметь величину искомого элемента. Коэффициенты этой формулы имеют следующее значение (см. табл. IX на стр. 104).

С указанным здесь значением коэффициентов искомые элементы планетных орбит вычисляются вполне точно до пятого десятичного знака включительно, что составляет точность, вполне удовлетворяющую астронома.

ГЛАВА IX.

Весь предыдущий анализ приводит к заключению, что планетные орбиты в солнечной системе распределены в пространстве с строжайшей закономерностию. Единственное, что еще может в нас возбуждать некоторое сомнение, это — то, насколько правильны данные мною значения тех коэффициентов, при помощи которых можно получить величину каждого из элементов для любой орбиты. Не будь в солнечной системе кольца астероидов, этому сомнению не было бы места, так как в этом случае мы имели бы вполне точную величину элементов пятой орбиты и тогда наши классификации отчетливо показали бы, имеются ли на самом деле у членов, стоящих в ряду сумм третьего порядка, те свойства, какие мы им приписывали в главах седьмой и восьмой. В виду этого я считаю необходимым остановиться на этом предмете и привести здесь соображения, в силу которых мы имеем право думать, что коэффициенты, служащие для вычисления больших и малых полуосей, по всей вероятности, верны или, по крайней мере, весьма мало отличаются от их настоящего значения. Что же касается коэффициентов, при помощи которых могут быть вычислены по данным мною формулам все остальные элементы планетных орбит, то относительно их значения можно думать, что они не так далеко стоят от действительных. Соображения эти таковы.

В главе шестой нами было доказано, что, если у нас имеется семейство кривых, состоящее из четырех парабол, и мы совершаем переход последовательно от одной кривой к другой, то полученные таким способом ординаты составляют такой ряд чисел, что составленные по ним суммы третьего порядка должны представлять ряд членов арифметической прогрессии, удовлетворяющих равенствам:

$$S_1^3=8(b_0+9c_0) \qquad S_2^3=8(b_0+11c_0)$$

$$S_3^3=8(b_0+13c_0)\ldots \qquad S_k^3=8\left(b_0+(7+2\text{к})c_0\right)$$

(см. формулы на страницах 82 и 83).

Отсюда видно, что, если в ряду сумм третьего порядка имеются хотя бы только два члена, то их будет вполне достаточно для того, чтобы определить числовое значение коэффициентов b_0 и c_0, необходимое для нахождения всех остальных членов этого ряда, а через посредство их и тех

ТАБЛИЦА IX.

Элементы	A_0	B_0	C_0	A_1	B_1	C_1	A_2	B_2	C_2
Долгота перигелия	169,6663387	—222,8135451	—203,3103.76	3,0881566	140,6996202	155,1939142	—0,6176331	—14,1257672	—15,9614903
Долгота восходящего узла	62,6525586	—34,1313128	—127,3352577	—19,3198521	38,8523925	58,7845755	3,8639694	—4,7730153	—6,3833128
Наклонность к эклиптике	1,7378697	7,6321939	—4,9429667	0,0063902	—2,5333755	2,0241133	—0,0023007	0,1893630	—0,1893630

членов основного ряда классификации, которые стоят дальше девятого члена. Совершенно ясно поэтому, что, ставя в классификации на месте кольца астероидов какую либо величину, мы тем самым налагаем на числовое значение членов основного ряда классификации, стоящих за девятым членом, вполне определенное требование, а, следовательно, твердо устанавливаем и величину коэффициентов в формулах, служащих для вычисления элементов планетных орбит. Я поясню теперь, почему можно думать, что в таблице I на месте кольца астероидов должно стоять именно число 2,81518, а не какое либо другое.

Мы видели, что вставка в основной ряд классификации числа 2,81518 превращает суммы третьего порядка в числа кратные от числа 9,36639. Это налагает на коэффициент b_0 в предыдущих формулах для S_1^3, S_2^3, S_3^3, ... S_k^3 условие, чтобы $b_0 = -5c_0$, от чего математическое выражение значений этих сумм становится проще, а число 9,36639 делается равным помноженному на 4^2 коэффициенту c_0. Представленное в таком виде значение числа 9,36639 тотчас же и выясняет нам, что оно служит весьма важной и интересной характеристикой всей солнечной системы и, как таковое, должно заключать в себе глубокий астрономический смысл. В силу этого соображения я полагаю, что число это не случайно оказалось равным значению деленной на π Гауссовой постоянной, если последнюю выражать в километрах и отнести ее к одной секунде времени. В самом деле, если допустить, что число 9,36639 действительно равно деленной на π Гауссовой постоянной, то, вычисляя на основании этого равенства величину солнечного параллакса, мы получаем для него отсюда величину в 8″,907, которое настолько близко к числу 8″,80, принимаемому астрономами, что можно серьезно задумываться над тем, которое из этих чисел вернее. Это тем более позволительно, что принимаемое теперь астрономами значение солнечного параллакса ниже той величины, которая была найдена в 1874 и 1882 годах из наблюдений над прохождением Венеры по диску солнца. Как известно, большое число наблюдений дало тогда для солнечного параллакса величину от 8″,82 до 8″,86, а наблюдения немецкой экспедиции дали даже число 8″,88. Да и вообще надо заметить, что к мысли о том, что солнечный параллакс равен 8″,90 далеко не все астрономы относятся отрицательно. Вот эти то соображения и могут побуждать нас смотреть на получаемое из классификации по большим полуосям значение солнечного параллакса в 8″,907, как на число, которое, если и не вполне строго отвечает действительности, то во всяком случае отличается от настоящего ничтожно мало. А это обстоятельство в свою очередь заставляет относиться с доверием и к числу 2,81518, при помощи которого может быть получено такое значение солнечного параллакса, а через него и ко всему тому, что установлено нами в главе седьмой.

Перейдем теперь к классификациям по долготам перигелия, по долготам восходящего узла и наклонностям к эклиптике. В главе седьмой мы видели, что как одно из следствий, к которым приводит изучение классификаций по большим и малым полуосям, является положение, что в группах Нептуна и Юпитера рост малой полуоси совершается быстрее, чем у большой полуоси, так что представители этих групп, начиная с десятого места в группе Нептуна и с двенадцатого места в группе Юпитера должны были бы двигаться по эллипсам, растянутым в направлении теоретической малой оси. В остальных группах мы констатировали, наоборот, больший рост большой полуоси и, следовательно, приобретение орбитами все более и более вытянутой формы в этом же направлении. Эту особенность роста полуосей мы можем использовать для решения следующего вопроса. Так как, на основании сказанного, в группах Нептуна и Юпитера возможно, теоретически говоря, движение планет по круговым орбитам, то мы можем поставить себе задачу отыскать, как расположены в пространстве плоскости этих орбит.

Чтобы найти ответ на поставленный вопрос, приравняем прежде всего равенства (50) и (51) соответственно равенствам (54) и (55) и определим корни получающихся таким образом двух квадратных уравнений. Вычисление дает для них следующие значения:

для группы Нептуна $z_1 = -2,9857$ $\qquad z_4 = 9,4083$

для группы Юпитера $z_2 = 1,9925$ $\qquad z_3 = 11,6303$

Подставляя эти значения z в формулу (65), находим при помощи коэффициентов, взятых из таблицы IX, что в группе Нептуна плоскости круговых орбит пересекают эклиптику в точках, долгота которых равна

$$\omega_1 = 322^\circ 6' \qquad \omega_4 = 131^\circ 49'$$

и наклонены к ней под углами

$$i_1 = 18^\circ 35' \qquad i_4 = 2^\circ 9'$$

Такие же углы в группе Юпитера суть

$$\omega_2 = 342^\circ 11' \qquad \omega_3 = 76^\circ\, 4'$$
$$i_2 = 8^\circ 31' \qquad i_3 = 3^\circ 24'$$

Отсюда мы видим, что интересующие нас плоскости круговых орбит раскинуты в пространстве веерообразно и при том так, что все они пересекаются почти по одной и той же линии. В самом деле, вычисляя координаты точек пересечения с небесным сводом линий, по которым пересекаются эти плоскости круговых орбит, мы находим для них следующие значения:

линия пересечения плоскостей в группе Нептуна имеет выход в точку неба, южная широта которой равна 0°21′ и долгота равная 321°4′;

для линии пересечения плоскостей в группе Юпитера имеем южную широту равную 3°16′ и долготу равную 329°48′;

Таковы элементы, которыми определяется положение в пространстве линий пересечения рассматриваемых нами двух пар плоскостей, заключающих в себе круговые орбиты. Они показывают, что линии эти не совпадают, но однако они столь тесно примыкают друг к другу, что невольно возникает мысль, не должны ли они на самом деле совпадать. Получается впечатление, что линия, имеющая выход в точку неба с координатами: южная широта равна 1°48′30″ и долгота равна 325°26′0″—или сама служит, или лежит весьма близко к той линии, из которой веером расходятся рассматриваемые здесь плоскости круговых орбит в группах Нептуна и Юпитера.

Будет не безинтересно сопоставить здесь только-что полученный результат с теми фактами из физики и геофизики, которые собственно и побудили меня заняться изучением строения планетной системы Солнца.

В свое время я обращал внимание ученых на ту особенность в годовом ходе вариации немагнитного тела, что в эпохи, близкие к равноденствиям и солнцестояниям вариация получает максимальную величину в противоположных направлениях. Позже я показал, что и наблюдения над девиацией такого же тела, которую оно получает в присутствии пламени, отмечают эти же самые эпохи. Более строгая обработка тех и других наблюдений с соблюдением требований теории вероятностей приводит к выводу, что в этом вопросе решающим моментом является прохождение земли через два взаимно-перпендикулярных направления, из которых одно определяется долготой, равной в среднем

из наблюдений над девиацией	325°5′
„ „ „ вариацией за три года тоже	325°5′

Отсюда видно, что из физических и геофизических наблюдений получается почти в точности та же долгота, какую нам дают астрономические наблюдения, выясняющие нам теперь, что это за долгота и в какой связи находится она с распределением планетных орбит в пространстве, занимаемом солнечной системой. На этом основании приходится заключить, что лежащие в плоскости эклиптики направления на долготы в 55° и 325° интересны не только по своему геометрическому смыслу, но также и по физическому, так как они кладут резкий отпечаток на ход физических процессов, совершающихся на земле, примером чего могут служить указанные выше явления. Надо думать, что таких явлений на земле найдется не мало, если только начать их разыскивать. Одно из них мною найдено еще в 1915 г. и теперь я изучаю его в подробностях. С какими новыми фактами приходится здесь встречаться,—об этом я не раз уже говорил в своих докладах. Более подробное сообщение о них я надеюсь опубликовать в недалеком будущем.

Было бы ошибочно думать, что те числа, которыми характеризуется взаимное расположение двух пар плоскостей, заключающих в себе круговые орбиты, должны иметь в наших глазах решающее значение. Это было бы справедливо в том случае, когда коэффициенты, при помощи которых были получены углы, легшие в основу наших вычислений, служили бы выражением непреложной истины. Но так как у нас не может быть уверенности в этом в виду тех соображений, которые были приведены в главе восьмой, то до тех пор, пока остается неизвестным истинное значение этих коэффициентов, можно всегда думать, что в действительности рассматриваемые плоскости пересекаются по одной линии. Косвенное доказательство правильности такой точки зрения я усматриваю между прочим в том обстоятельстве, что из всей массы изученных мною комбинаций коэффициентов та комбинация, при помощи которой было получено приведенное выше решение задачи, дает наилучшие результаты в смысле наиболее упорядоченного и более тесного взаимного расположения указанных плоскостей. Это указывает как будто бы на то, что существует такая комбинация коэффициентов, при которой означенные плоскости окажутся пересекающимися по одной и той же линии. Отсюда видна вся важность решения поставленной задачи иным путем. Такой путь существует и на него я уже вступил. К каким результатам приведет этот новый способ решения задачи,—покажет будущее. Теперь же, я думаю, астрономы могут всетаки с большой пользой для дела пользоваться теми значениями коэффициентов, которые даны мною в таблицах VIII и IX.

ГЛАВА X.

Законности, вложенные в строение планетной системы Солнца, поражают необычайной своей простотой. Но ум исследователя не может не останавливаться в изумлении и пред обилием тех весьма важных по своему смыслу и значению следствий, какие вытекают из этих законностей. Здесь на первую очередь становится вопрос, вполне ли правильно будет ставить во главу угла исследований возмущенного движения планет предположение, что пертурбация может происходить лишь между телами, находящимися друг с другом в близком соседстве. Теперь, когда мы знаем, что солнечная система состоит из четырех самостоятельных групп планет, невозможно исключать из рассмотрения судьбу самой группы во всем ее целом и это обстоятельство вносит в теорию возмущений совершенно новый принцип. Астрономы должны исследовать, не облегчается ли от того изучение возмущенного движения планет.

Но в не меньшей степени важно всесторонне изучить и вопрос о том, следы какого именно космогонического процесса мы имеем перед собой в групповом распределении планетных орбит и не сокрыта ли здесь для нас разгадка тех геологических судеб земного шара, о которых мы знаем по трудам геологов.

Уже эти вопросы так обширны по своему об'ему, что разработка их может быть по силам только большому числу ученых. Но мне хотелось бы обратить внимание астрономов в этой области на некоторые стороны дела. И это поясняет появление строк, которые находятся впереди.

Если мы обратимся к распределению планет по группам, то мы не можем не заметить того, что полный триплет представляет собою только группа Нептуна. Что же касается всех остальных групп, то там мы находим только по две планеты. Естественно является мысль, что и в этих группах находятся неведомые нам пока планеты, которые дополняют их до полных триплетов. И если даже совершенно игнорировать факты из астрономии, делающие вероятным существование таких триплетов, то мысль о них должна невольно возникать при рассмотрении классификации по какому угодно элементу планетных орбит. В самом деле, классификации по большим и малым полуосям, а также по долготам перигелия и долготам восходящего узла показывают, что два члена, получающиеся в ряду сумм третьего порядка, являются числами кратными от некоторого числа, при чем первый член оказывается повсюду в два раза больше его, а второй в три раза. Такая последовательность в величине этих членов приводит к мысли, что в действительности ряд начинается с этого именно числа, как например, в классификации по большим полуосям с числа 9,36639. А это равносильно тому, что между Меркурием и Солнцем находится еще одна планета или, быть может, группа очень маленьких планет, образующих собою второе кольцо астероидов.

К подобной же мысли о существовании по крайней мере двух планет вблизи Нептуна способны приводить исследователя многие из классификаций по долготам перигелия, долготам восходящего узла и наклонностям к эклиптике. Так, например, рассматривая ряд сумм первого порядка в таблице V, нельзя не останавливать своего внимания на том, что, начиная с пятого члена, в ряду начинают повторяться почти те же числа, которые стояли в нем на первых четырех местах. При виде этого является невольное желание дополнить ряд еще двумя как бы недостающими членами. В период начальной разработки вопроса я поддавался этому желанию и иногда это в немалой степени облегчало мою работу.

В виду этих обстоятельств сам собою напрашивается вопрос, не существуют ли и на самом деле планеты, места которых в солнечной *системе отмечаются пробелами, которые можно находить в тех или иных* классификациях по элементам планетных орбит? Мне кажется, есть много оснований не относиться к мысли о существовании этих трех небесных тел отрицательно. Известно также, что в летописи астрономии внесены даже сообщения о том, будто бы некоторым лицам посчастливилось видеть планеты, о которых у нас идет сейчас речь. Так, в свое время наделало немало шума в астрономическом мире сообщение Лескарбо, что он видел прохождение по диску солнца быстро двигавшегося темного тела. Как известно, это наблюдение дало повод знаменитому Леверрье заняться вычислением элементов орбиты тела, виденного Лескарбо, и он нашел, что большая полуось этой орбиты равна 0,1427, время обращения вокруг солнца несколько меньше 20 суток, долгота восходящего узла равняется 13°, а наклонность к эклиптике заключается между 12° и 13°.

Сопоставим эти цифры с теми, которые получаются из наших классификаций. Из них мы находим прежде всего, что это тело может принадлежать только к группе Урана. Что же касается размеров его орбиты и положения последней в пространстве, то все это определяется следующими цифрами:

большая полуось	0,07743
малая полуось	0,05816
время обращения вокруг солнца . .	10,370 суток
долгота перигелия	326°,356
долгота восходящего узла	295°,317
наклонность к эклиптике	—3°,205

Отсюда видно, что, элементы, определяемые из классификаций, получаются существенно отличающимися от данных Леверрье. В этом отношении заслуживает особенного внимания то, что среднее расстояние от солнца получается из классификации почти ровно в два раза меньше, чем у Леверрье. Так как мы видели, что получающиеся из классификаций по большим и малым полуосям коэффициенты заслуживают самого большого доверия, то в виду этого представляется очень важным установить, мог ли видеть Лескарбо это тело проходящим по диску солнца в виде черного пятна.

Легко убедиться вычислением, что, если между Солнцем и Меркурием на самом деле существует еще одна планета, то вследствие своей очень большой близости к солнцу она никоим образом не может существовать, как темное тело. В самом деле, на основании новейших определений мы должны считать так называемую солнечную постоянную равной 2,1 калориям. Следовательно, количество тепла, посылаемое солнцем в одну минуту времени на площадку в один квадратный сантиметр, помещенный на расстоянии, равном большой полуоси предполагаемой орбиты, должно быть равно 350,8 калориям. Если предположить, что раскаленная поверхность планеты испускает тепло в пространство столь же интенсивно, как и черное тело, и температура этого пространства равна абсолютному нулю, то даже и в этом, мало вероятном, случае тепловое равновесие на поверхности планеты могло бы установиться лишь тогда, когда температура ее была бы равна круглым числом 1185°. Заметить простым глазом или глазом, вооруженным небольшой трубой без всяких специальных приспособлений, прохождение по солнечному диску столь сильно раскаленной планеты, конечно, трудно. Для этого требуются особые приемы и технические приспособления. К числу последних, бесспорно, принадлежит спектроскоп, который и может в этом деле оказать прекрасную услугу.

Таким образом трудно допустить, что Лескарбо видел интрамеркуриальную планету. Но отсюда однако же не следует, что такая планета не существует. Не следует это и из того, что все поиски астрономов в этой части неба оказываются до сих пор безрезультатными. Весьма возможно, что тщательное изучение солнечного спектра рано или поздно докажет нам, что так долго разыскиваемое небесное тело на самом деле существует.

В несколько ином положении находится дело розыска двух других планет, существование которых мы можем подозревать на основании наших классификаций. Этими классификациями устанавливаются для их орбит следующие элементы:

1. планета, ближайшая к Нептуну

большая полуось орбиты	30,70873
малая полуось	30,65253
долгота перигелия	26°,305
долгота восходящего узла . . .	99°,172
наклонность к эклиптике	5°,210

2. планета, более удаленная от Нептуна

большая полуось орбиты	30,89914
малая полуось	30,89602
долгота перигелия	153°,238
долгота восходящего узла . . .	141°,964
наклонность к эклиптике	—1°,148

Эти элементы показывают, что, находясь в большой близости к Нептуну, эти планеты легко могли бы быть приняты за спутников его. Но могло бы случиться также и то, что замеченные вблизи Нептуна планеты в случае перерыва в наблюдениях могли бы незаметно разойтись настолько, что наблюдатель, усвоивший точку зрения на них, как на спутников Нептуна, мог бы совершенно потерять их из вида. Не в этом ли и кроется настоящая причина того, что наблюдения Ласселя и Шеберле, свидетельству которых едва ли есть основание не доверять, до сих пор остаются совершенно одинокими? Теперь, когда элементы орбит предполагаемых светил, приведенные выше, могут быть рассматриваемы, как весьма вероятные, представляло бы огромный интерес сделать попытку розыска этих планет, положив для этого в основу, с одной стороны, величину выписанных выше элементов, с другой стороны наблюдения упомянутых астрономов, свидетельствующие нам о том, что 14 августа 1850 года и 24 октября 1892 года вблизи Нептуна находились небольшие светила, которые можно было принять за спутников этой планеты. Открытие таким путем новых планет явилось бы доказательством величайшей мощи тех закономерностей, выяснению которых были посвящены предшествующие страницы настоящего исследования. Но это открытие было бы чрезвычайно важно и в том отношении, что оно позволило бы сделать все необходимые исправления в той форме выражения этих закономерностей, за каковую мы должны, очевидно, считать коэффициенты, которыми так полны все вышеприведенные наши таблицы.

Остановлюсь в заключение еще на одном вопросе. В вступительных строках к настоящему исследованию мною было указано, что побудительным мотивом к началу этой работы явилось мое стремление узнать, нельзя ли обнаружить в пространстве, занимаемом солнечной системой, таких направлений, которые можно было бы принять за оси как бы некоторой неоднородности среды, и таким образом ближе подойти к об'яснению некоторых фактов, найденных мною в продолжение многих лет отчасти путем наблюдений, отчасти путем опытов. Все то, что было рассмотрено в главе девятой, на мой взгляд с бесспорностью свидетельствует нам о том, что в планетном пространстве солнечной системы действительно имеются на лицо три каких то особых направления. И это—весьма важный факт. Пусть эти направления пока нам точно неизвестны. Я надеюсь впрочем, что в недалеком будущем мне удастся дать для них вполне точные координаты. Но несмотря на это нам чрезвычайно важно знать, что изучение строения планетной системы Солнца отчетливо констатирует самый факт существования таких направлений. Ведь перед нами встает теперь во всем своем величии одна из интереснейших загадок космогонии, что означают собою эти направления, почему они получили в пространстве, занимаемом солнечной системой такое расположение, что имеют выход в сторону полюса эклиптики, точки весеннего равноденствия и перигелия земной орбиты и какая роль принадлежит им в деле распределения в пространстве планетных орбит.

Но и для геофизика далеко не безразлично знать, что во время своего обращения вокруг солнца земля проходит по местам особых направлений в пространстве, занимаемом солнечной системой. Обширный ряд вопросов возникает в связи с таким фактом и геофизики должны их тщательно изучить. Как знать, быть может, эта причина кладет заметный отпечаток на ход многих физических процессов, совершающихся на земле, и для нас здесь то именно и открыт путь для об'яснения тех загадочных явлений, отрывочные сведения о которых мы можем найти на страницах научных журналов, посвященных физике и геофизике. Все это возможно допустить, но отсюда еще далеко до истины. Истина же нам будет ясна лишь тогда, когда геофизики уверятся в том, что рекомендуемый мною путь исследования действительно обещает привести их к ценным и интересным в научном отношении результатам и примут меры к тому, чтобы вопрос был изучен всесторонне и получил в их трудах ясное и вполне отчетливое освещение.

Профессор Н. Мышкин.

Минск, 24 апреля
1925 года.

ZUSAMMENFASSUNG.

Vorstehende Forschung, die unter dem Titel „Gesetzmässigkeiten im Bau des Planetensystems der Sonne“ gedruckt wird, bildet eine Veröffentlichung der Handschrift des Verfassers, die er schon am 14 August 1918 zur Aufbewahrung in das Astronomische Observatorium an der Universität zu Charkov übergeben hatte, die aber infolge politischer Ereignisse, die sich in der Ukraina zutrugen, fast verloren gegangen wäre. Die Handschrift jedoch ist neulich gefunden und in das Observatorium in unversehrtem Zustande wiedererstattet worden.

Indem der Verfasser seine Arbeit für den Druck vorbereitete, hielt er es für nützlich, dieselbe durch eine ausführliche Erörterung der mathematischen Begründungen derjenigen Methode zu vervollständigen, die ihm die beim Bau des ganzen Sonnensystems zu Grunde gelegten Gesetzmässigkeiten zu erklären geholfen hat. Zu diesem Zwecke hat der Verfasser vor allem die Frage über die Bestimmung unbekannter Perioden, auf Grund von Beobachtungen, ausführlich betrachtet und eine neue Lösung dieser Aufgabe, die von der Lösung Oppenheim’s absticht, gegeben. Ihre Anwendung auf die Frage über die Perioden in der fleckenbildenden Tätigkeit der Sonne, auf Grund von Schwabe’s Beobachtungen während der Zeitperiode von 1826 bis 1868, führt uns zu folgendem Ergebnisse: als Hauptperiode erscheint die Periode von 11,616 Jahren, als Ergänzungsperioden aber—die Perioden zu 6,083; 3,362; 2,381 Jahren. Auf Grund dieses kann man annehmen, dass es in der fleckenbildenden Tätigkeit der Sonne keine Perioden gibt, die grösser als 11,616 Jahre wären, wie viele Astronomen auf Grund der Erforschungen Wolf’s anzunehmen pflegen. Da alle vier, nach den Beobachtungen Schwabe’s berechneten Perioden sich zu einander in Verhältnissen, die den Vielfachen nahe sind, befinden, so weist das wohl darauf hin, dass man die Fleckenzahl auf der Sonne durch die einfache Periodenreihe von Fourier ausdrücken muss.

In zweiter Reihe hat der Verfasser die Frage über die komplizierte periodische Veränderlichkeit, die Ordinatenbedeutungen beim Uebergang über die Zweige einiger Kurvenfamilien ergeben,—betrachtet. Als solche werden folgende Fälle vermerkt:

1. Parabelfamilien der Art $y = A + Bx + Cx^2$
2. Kurvenfamilien der Art $y = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$
3. Familien gerader Linien $y = A + Bx$

Die Analyse dieser Fälle führt uns zu folgenden Schlüssen:

1. wenn die Kurvenfamilie aus vier Parabeln besteht, so ergibt die Gesammtbedeutung der Ordinaten in der Reihe gewisser Summen, die der Verfasser als Summen dritter Ordnung bezeichnet, solche Zahlen, die der Gleichung der Geraden Genüge leisten;

2. wenn die Familie vier Kurven der Art $y = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$ bildet, so erhalten die Summen jeder beliebigen Ordnung diejenige merkwürdige Eigenschaft, dass das Verhältnis $\frac{S^m_{k+1}}{S^m_k}$ einundderselben Konstante gleich beibt;

3. wenn, schliesslich, die Familie aus vier Geraden besteht, so ergeben die Glieder der Summenreihe zweiter Ordnung, paarweise genommen, immer als Summe einunddieselbe Zahl.

Es erweist sich, dass der erste dieser Lehrsätze auch eine direkte Anwendung auf den Fall hat, wenn eine Analyse der Dislokation der Planetenbahnen im Raume ausgeführt wird. Um sich davon zu überzeugen, wollen wir die Orbitenelemente, nach der tatsächlichen Dislokation der Planeten im Sonnensystem, in Reihe ordnen, nach ihnen zuerst die Unterschiede erster Ordnung finden, dann aber diese Unterschiede, die Zwischenzahl übergehend, paarweise einer Summierung unterziehen.

Den gefundenen Summen nach wollen wir auf dieselbe Weise auch noch die Summen zweiter und dritter Ordnung finden. Dann erhalten wir folgende Zahlen (sieh Tabelle I auf der Seite 114).

Die Grundreihen dieser Tabelle enthalten die in der Astronomie angenommenen Zahlen. Aus welchen Erwägungen für die im Sonnensystem vom Asteroidenring eingenommene Stelle die in der Tabelle I sich befindlichen Bedeutungen der Elemente gebraucht worden sind,—darüber wird weiter unten gesagt werden.

Wenn wir uns an die Zahlen, die in der Summenreihe der dritten Ordnung stehen, wenden, so können wir sehen, dass es alles Vielfache sind und nur in der Klassifikation der Neigungen einwenig von dieser Gesetzmässigkeit abweichen. So, zum Beispiel, in der Klassifikation:

1. nach den grossen Halbachsen erweisen sie sich als Vielfache von der Zahl	9,36639
2. nach den kleinen Halbachsen	9,36189
3. nach den Längen des Periheliums	—9°,88216
4. nach den Längen des Ascensionalpunktes	61°,82350

Die zweite Gesetzmässigkeit, die diese Zahlen äussern, besteht darin, dass das Verhältnis der zweiten von ihnen zur ersten sich überall als einunddieselbe Zahl erweist und dem Verhältnisse 3 : 2 gleicht. Es bedeutet, dass die gleichen Elemente aller Planetenbahnen, mit Ausnahme der Neigungen, durch folgende wechselseitige Beziehung miteinander verbunden sind:

$$\frac{(\psi_9-\psi_8)+3(\psi_7-\psi_6)+3(\psi_5-\psi_4)+(\psi_3-\psi_2)}{(\psi_8-\psi_7)+3(\psi_6-\psi_5)+3(\psi_4-\psi_3)+(\psi_2-\psi_1)}=\frac{3}{2}$$

Der oben angeführte Lehrsatz verdeutlicht uns, dass wir auf die Grundreihe der Klassifikation jedem beliebigen Elemente nach, als auf die Verbindung von vier selbstständigen Zahlengruppen sehen müssen, von denen man auf die erste Gruppe die an der ersten, fünften und neunten Stelle stehenden Zahlen beziehen muss; auf die zweite—die an der zweiten und sechsten Stelle stehenden; auf die dritte—die an der dritten und siebenten Stelle stehenden und, zuletzt, auf die vierte—die an der vierten und achten Stelle stehenden. Wenn sich aber das so verhält, so sind auch folglich die Planeten selbst im Sonnensystem einem ebensolchen Gruppierungsgesetz unterworfen. Daher verpflichten wir uns den Merkur und den Neptun samt dem Asteroïdenringe als Planeten der ersten Gruppe , die Venus und den Jupiter als Glieder der zweiten Gruppe anzusehen. Die Erde und der Saturn müssen zur dritten Gruppe hinzugezählt werden, der Mars und der Uranus aber, als die Vertreter der vierten Gruppe angesehen werden. Was

TABELLE I.

Elemente der Klassifikation	Merkur ψ_1	Venus ψ_2	Erde ψ_3	Mars ψ_4	Asteroiden ψ_5	Jupiter ψ_6	Saturn ψ_7	Uranus ψ_8	Neptun ψ_9
Grosse Halbachse	0,38712	0,72333	1,00000	1,52368	2,81518	5.20256	9,55475	19,21814	30,10957
Differenzen 1-ter Ordn. .	0,33621	0.27667	0,52368	1,29150	2,38738	4.35219	9,66339	10,89143	
Summen 1-ter Ordn. . . .	0,85989	1,56817	2,91106	5,64369	12,05077	15,24362			
Summen 2-ter Ordn. . . .	3,77095	7,21186	14,96183	20,88731					
Summen 3ter- Ordn. . . .	18,73278	28,09917							
Kleine Halbachse	0,37881	0,72331	0,99986	1,51703	2,80645	5.19648	9,53981	19,19749	30,10836
Differenzen 1-ter Ordn. .	0,34450	0.27655	0,51717	1,28942	2,39003	4,34333	9,65768	10,91087	
Summen 1-ter Ordn . . .	0,86167	1,56597	2,90720	5,63275	12,04771	15,25420			
Summen 2-ter Ordn . . .	3,76887	7,19872	14,95491	20,88695					
Summen 3-ter Ordn . . .	18,72378	28,08567							
Länge des Periheliums . .	75,89717	130,14057	101,21870	334,21833	297,20667	12,72097	91,09821	171.54869	46.72736
Differenzen 1-ter Ordn. .	54,24340	—28,92187	232,99963	—37,01166	—284,48570	78,37724	80,45048	—124,82133	
Summen 1-ter Ordn. . . .	287,24303	—65,93353	—51,48607	41.36558	—204,03522	—46,44409			
Summen 2-ter Ordn. . . .	235,75696	—24,56795	—255,52129	—5,07851					
Summen 3-ter Ordn. . . .	—19,76433	—29,64646							
Länge des Ascensionalpunktes	47,14474	75.78809	0,00000	48,78670	103,45780	99,44341	112,79041	73.47711	130,68139
Differenzen 1-ter Ordn. .	28,64335	—75,78809	48,78670	54,67110	—4.01439	13,34700	—39,31330	57,20428	
Summen 1t-er Ordn. . . .	77,43005	—21,11699	44,77231	68,01810	—43.32769	70,55128			
Snmmen 2-ter Ordn. . . .	122,20236	46,90111	1,44462	138,56938					
Summen 3-tes Ordn. . . .	123,64698	185,47049							
Neigungen zur Ekliptik .	7,03014	3,39364	0,00000	1.85030	1,411695	1.30874	2,49252	0,77246	1,77924
Differenzen 1-ter Ordn. .	—3,63650	—3,39364	1.85030	—0,438605	—0,102955	1,18378	—1,72006	1,00678	
Summen 1-ter Ordn. . . .	—1,78620	—3,832245	1,747345	0,745175	—1.823015	2,19056			
Snmmen 2-ter Ordn. . . .	—0,038855	—3,087070	—0,075670	2,935735					
Summen 3-ter Ordn. . . .	—0,114525	—0,151335							

TABELLE II.

Elemente	A_0	B_0	C_0	A_1	B_1	C_1	A_2	B_2	C_2
Grosse Halbachse . . .	3,2588263	0,4066449	—3,1813951	—2,9269972	—1,1284257	1,2575330	0,5853994	0,1916735	—0,0776428
Kleine Halbachse . . .	3,2523121	0,4061926	—3,1941525	—2,9255906	—1,1314250	1,2626095	0,5851181	0,1922028	—0,0781935
Länge des Periheliums	169,6663387	—222,8135451	—203,3103,76	3,0881566	140,6996202	155,1939142	—0,6176331	—14,1257672	—15,9614903
Länge des Ascensionalpunktes	62,6525586	—34,1313128	—127,3352577	—19,3198521	38,8523925	58,7845755	3,8639694	—4,7730153	—6,6383128
Neigungen zur Ekliptik	1,7378697	7,6321939	—4,9429667	0,0063902	—2,5333755	2,0241133	—0,0023007	0,1893630	—0,1893630

aber die anderen Geschwister dieser Planeten in den entsprechenden Gruppen anbetrifft, so sind sie uns vorläufig unbekannt, aber die Lage ihrer Bahnen und die Dimensionen der letzteren sind aufs Strengste durch die oben angeführte Tabelle bestimmt. So, zum Beispiel, können wir in der Uranusgruppe die Existenz eines Planeten oder eines Asteroïdenringes vermuten, der sich zwischen Merkur und Sonne befindet und dessen grosse Orbitenhalbachse im Ganzen nur 0,07743 gleicht, in den Gruppen Jupiters und Saturns aber—je einen Planeten, deren grosse Orbitenhalbachse sich sehr wenig von der Grösse der grossen Halbachse Neptuns unterscheidet. Daher dient uns die obenangeführte Tabelle nicht nur als Hinweiser darauf, in welcher Beziehung sich die Elemente einzelner Planetenbahnen zu einander befinden, sondern auch darauf, wie überhaupt das ganze Sonnensystem gebaut ist. Es ist sehr bemerkenswert, dass der ganze Aufbau des Sonnensystems, der uns auf den ersten Anblick sehr kompliziert erscheinen kann, überhaupt nur in eine Formel untergebracht werden kann, die wir folgendermassen niederschreiben können:

$$\psi = A_0 + B_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} z\right) + C_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} z\right) +$$

$$+ \left\{ A_1 + B_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} z\right) + C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} z\right) \right\} z +$$

$$+ \left\{ A_2 + B_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} z\right) + C_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} z\right) \right\} z^2$$

Wenn wir in diese Formel für die Buchstaben A_0, B_0, C_0; A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2 Zahlen setzen wollen, indem wir sie folgender kleinen Tabelle II entnehmen, dem Buchstaben z aber folgerecht die Bedeutung der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 geben und darnach die Zahlenbedeutung des rechten Teils dieser Formel berechnen, so erhalten wir die Elemente aller Planetenbahnen mit einer Genauigkeit bis zum fünften Dezimalzeichen inclusiv. Hieraus folgt, dass es die Folgerichtigkeit einer Reihe von Naturalzahlen ist, die als ein gewisser Eckstein beim Bau des Planetensystems der Sonne als

Grundlage gelegt worden ist, als Grundlage der Dimensionenberechnung und des Dislokationsmittels im Raume einzelner Planetenbahnen aber—die in der Tabelle II gegebenen Zahlen. Da diese Zahlen das Sonnensystem in demselben Masse charakterisieren, wie die Gauss'sche Konstante, so entsteht die Frage, inwiefern sie richtig sind. Augenscheinlich wäre diese Frage nicht am Platze, wenn im Sonnensystem kein Asteroïdenring wäre, oder wenn uns noch ein Planet bekannt wäre, wie, zum Beispiel, ein intramerkurialer oder transneptunischer. Da wir aber in der Tat nichts dergleichen haben, so kann in uns der Verdacht auftreten, dass die Tabelle keine vollständig richtige Bedeutung der Zahlencharakteristik des Planetensystembaues unserer Sonne gibt.

Die Lösung der Frage über die volle oder nicht ganz volle Glaubwürdigkeit der in der Tabelle II sich befindlichen Zahlen hängt wesentlich vollständig davon ab, ob wir den Umstand rechtfertigen können oder nicht, dass in der Tabelle I an der fünften Stelle ihrer Grundreihen gerade diejenigen Zahlen stehen müssen, die sich darin befinden, aber keine andern. Wollen wir die Beantwortung dieser Frage der Reihenfolge nach suchen und in erster Reihe betrachten, ob wir irgend welchen Grund haben die Zahl 2,81518 in die Tabelle zu setzen.

Die Tabelle I zeigt uns, dass die Einschaltung der Zahl 2,81518 in die Grundreihe der Klassifikation nach den grossen Halbachsen die Summen der dritten Ordnung in Zahlen, die das Vielfache von der Zahl 9,36639 bilden, verwandeln. Diese Zahl aber steht der Bedeutung der durch π geteilten Gauss'schen Konstante, die in Kilometern ausgedrückt und auf eine Sekunde Zeit bezogen ist, so nahe, dass man ernst darüber nachdenken kann, welche von diesen Zahlen richtiger sei. Ueber ihren Angrenzungsgrad können wir aus Nachfolgendem urteilen. Wenn wir zulassen, dass die Zahl 9,36639 in der Tat der durch π geteilten Gauss'schen Konstante gleich wäre, so erhalten wir, wenn wir, uns darauf gründend, die Grösse der Sonnenparallaxe berechnen, dass letztere 8″,907 gleicht. Die Astronomen aber nehmen an, dass die Parallaxe gleich 8″,80 sei, wobei man im Auge haben muss, dass die von den Astronomen jetzt bedingungsweise angenommene Grösse der Parallaxe kleiner ist, als die in den Jahren 1874 und 1882 aus Beobachtungen über den Durchgang der Venus längs der Sonnenscheibe gefundene. Wie bekannt, ergab damals eine grosse Anzahl von Beobachtungen für die Sonnenparallaxe die Grösse von 8″.82 bis 8″,86, die Beobachtungen der deutschen Expedition aber—sogar die Zahl 8″,88. Auf Grund dieses können wir annehmen, dass, wenn auch die Zahl 2,81518 nicht vollständig richtig ist, sie doch jedenfalls von der wirklichen sehr wenig abweicht. Daher müssen wir auch die in der Tabelle II für die grossen Halbachsen gegebenen Zahlen als die wahrscheinlichsten ansehen.

Nach denselben Erwägungen müssen wir augenscheinlich auch ebenso die sich auf die kleinen Halbachsen beziehenden Zahlen ansehen.

Schwieriger wird die Frage in Bezug auf die übrigen Elemente der Planetenbahnen gelöst. Wir haben jedoch ein Merkzeichen, wonach wir urteilen können, dass die Zahlencharakteristiken des Sonnensystems, was die Periheliumslängen, die Längen des Ascensionalpunktes und der Neigungen anbetrifft, aller Wahrscheinlichkeit nach den wirklichen sehr nahe stehen. Dieses Merkzeichen besteht darin, dass die Ebenen der in den Gruppen Neptuns und Jupiters theoretisch möglichen Kreisbahnen sich als fast auf einer und derselben Linie durchkreuzend erweisen, wenn wir die Elemente dieser Bahnen nach der oben angeführten Formel, mit Hilfe der aus der Tabelle II genommenen Koeffizienten, berechnen wollen. Man kann denken, dass die Linie, die ihren Ausgang ungefähr an dem Himmelspunkte hat, desen südliche Breite 1°48′23″ und Länge 325°25′52″ gleicht, die wirkliche Durchkreuzungslinie gennanter Ebenen vorstellt. Diese Frage bildet jetzt beim Verfasser den Gegenstand eines anderen Forschungsweges. Falls es sich erweisen sollte, dass eine solche Linie in dem vom Sonnensystem eingenommenen Raume wirklich existiert, so wird man dann die Zahlen der Tabelle II in Hinsicht der Gesammtelemente der Planetenbahnen, die augenblicklich betrachtet werden, verbessern können.

Zum Schlusse lenkt der Verfasser die Aufmerksamkeit der Gelehrten auf folgende interessante Tatsache. An das Studium der Gesetzmässigkeiten im Bau des Planetensystems der Sonne hat sich der Verfasser gemacht, nachdem die von ihm über die jährliche Variation eines unmagnetischen Körpers angestellten Beobachtungen, sowie auch die Beobachtungen über die ponderomotorische Tätigkeit einer Flamme auf das Anhängesystem gezeigt hatten, dass sich auf diese Erscheinungen der Durchgang der Erde in der Nähe der Linien der Tag-und Nachtgleiche und der Absiden stark äussert. Aus der Berechnung erwies es sich, dass die Sache sich so abspielt, als ob sich in der Ekliptikebene eine gewisse Ellipse befände, deren grosse Achse auf den Punkt der Ekliptik gerichtet ist, deren Länge durchschnittlich 325°5′ gleicht, der beobachtete physiche Effekt aber war dem Radius-Vektor dieser Ellipse proportional. Jetzt lenkt der Verfasser die Aufmerksamkeit der Forscher darauf hin, dass sich auch aus den Gesetzmässigkeiten im Planetensystembau der Sonne durchschnittlich eine fast ganz gleiche Zahl für die Länge des Punktes ergibt, wohin sich die Durchkreuzungslinie der in den Gruppen Jupiters und Neptuns theoretisch möglichen Kreisbahnen gerichtet erweist (325°26′). Es ist schwer zuzulassen, dass diese Uebereinstimmung der Zahlen eine zufällige wäre, weshalb der Verfasser meint, dass sich hier ein weites Forschungsgebiet sowohl für die Astronomen, als auch für die Geophysiker eröffne.

Prof. N. Myschkin.

Вычисление интегралов от произведения двух функций

§ 1. Пусть требуется найти приближенное значение интеграла

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} yzdx$$

где $y = f_1(x)$ и $z = F_1(x)$

Полагаем, что эти функции способны разлагаться в строку Маклорена при изменении аргумента в пределах интеграции.

Очевидно, данный интеграл выражает об'ем тела, ограниченного двумя цилиндрическими поверхностями $y = f_1(x)$ и $z = F_1(x)$, двумя параллельнымн плоскостями $x = \alpha$ и $x = \beta$ и двумя координатными плоскостями xy и xz.

Обозначим приближенное значение об'ема этого тела или, все равно, приближенное значение данного интеграла буквой V.

Перенесем начало координат в середину отрезка интеграции, т.-е., заменим x через

$$x + \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Тогда данный интеграл переходит в

$$J = \int_{-a}^{a} yzdx \quad , \tag{1}$$

где $a = \frac{\beta - \alpha}{2}$,

а новые функции (обозначим их прежннми буквами) $y = f(x)$, $z = F(x)$

Приближенное выражение этого интеграла J можно представить в разных видах.

I.

§ 2. Положим, нам не даны отдельные значения функций y и z, а даны интегралы от этих функций, умноженных на различные степенн аргумента. Для этого случая академик Чебышев, пользуясь теорией непрерывных дробей вывел формулу, содержащую функцию Лежандра, но можно получить формулу без функций Лежандра и минуя теорию непрерывных дробей.

Введем обозначения

$$A_k = \frac{1}{2a^{k+1}} \int_{-a}^{a} x^k y dx; \quad B_k = \frac{1}{2a^{k+1}} \int_{-a}^{a} x^k z dx; \tag{2}$$

Пусть сначала y и z — четные функции, т.-е.

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} y_0^{(2k)} \quad ; \qquad z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} z_0^{(2k)}$$

Условимся в дальнейшем вместо y_0 и z_0 писать просто y и z.

Очевидно,

$$J = 2a \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^{2i}}{2i+1} \sum_{k=0}^{i} \frac{y^{(2k)} z^{(2i-2k)}}{(2i)!\,(2i-2k)!} \tag{3}$$

С другой стороны, представив приближенное значение интеграла формулой

$$V = 2a \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{m} a_{2p.\,2q} A_{2p} B_{2q} \quad {}^{*)} \tag{4}$$

и выразив интегралы (2) A_{2p} и B_{2q} в виде бесконечных рядов

$$A_{2p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k} y^{(2k)}}{(2k)!(2p+2k+1)}; \qquad B_{2q} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k} z^{(2k)}}{(2k)!(2q+2k+1)}$$

Найдем разложение V

$$V = 2a \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{m} a_{2p.2q} \sum_{i=0}^{\infty} a^{2i} \sum_{k=0}^{i} \frac{y^{(2k)} \quad z^{(2i-2k)}}{(2k)!\,(2p+2k+1)\,(2i-2k)!\,(2q+2i-2k+1)} \tag{5}$$

Для того, чтобы найти значения коэффициентов $a_{2p.\,2q}$, при которых выражение V (4) возможно точно представляет величину интеграла J для любых функций y и z, сравниваем коэффициенты при $a^{2i}\,y^{(2k)}\,z^{(2i-2k)}$ в формулах (3) и (5)

---

*) Можно доказать, что пределы изменения указателей p и q должны быть одинаковыми (от 0 до m). Доказательство этого положения опускаем в виду того, что оно явствует и из этого, что функции y и z входят в интеграл (1) симметрично и приближенная формула (4) должна годиться для произвольных функций y и z.

$$\sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{m} a_{2p \,.\, 2q} \frac{1}{(2p+2k+1)(2q+2i-2k+1)} = \frac{1}{2i+1} \qquad (6)$$

$$(k=0,1 \;.\;.\;.\;.\; i; \qquad i=0,12 \;.\;.\;.\;.\;)$$

Введем обозначение

$$\sum_{p=0}^{m} a_{2p\,,\,2q} \qquad \frac{1}{2p+2k+1} = X_{2q\,,\,2k} \qquad (7)$$

Тогда условия (6) перепишутся в виде

$$\sum_{q=0}^{m} X_{2q\,.\,2k} \qquad \frac{1}{2q+2i-2k+1} = \frac{1}{2i+1} \qquad (8)$$

Для всякого числа q надо найти $m+1$ коэффициентов $a_{2p\,,\,2q}$ ($p=0,1, \ldots m$); эти коэффициенты найдутся из уравнений (7), в которых числу k надо дать $m+1$ последовательных значений $0,1, \ldots m$. С другой стороны для всякого числа k уравнения (8) должны доставить $m+1$ чисел $X_{2q\,,\,2k}$ ($q=0,1 \ldots m$); достаточное число уравнений получим, если в равенствах (8) дадим i $m+1$ последовательных значений k, $k+1$, $k+2, \ldots k+m$ (не надо забывать, что $k \leqslant i$). Уравнения эти будут таковы:

$$\frac{X_{0\,,\,2k}}{1} + \frac{X_{2\,,\,2k}}{3} + \frac{X_{4\,,\,2k}}{5} + \;.\;.\;.\;.\; + \frac{X_{2m\,,\,2k}}{2m+1} = \frac{1}{2k+1}$$

$$\frac{X_{0,\,2k}}{3} + \frac{X_{2\,,\,2k}}{5} + \frac{X_{4\,,\,2k}}{7} + \;.\;.\;.\;.\; + \frac{X_{2m\,,\,2k}}{2m+3} = \frac{1}{2k+3}$$

$$\frac{X_{0\,,\,2k}}{5} + \frac{X_{2\,,\,2k}}{7} + \frac{X_{4\,,\,2k}}{9} + \;.\;.\;.\;.\; + \frac{X_{2m\,,\,2k}}{2m+5} = \frac{1}{2k+5}$$

. . . .

$$\frac{X_{0\,,\,2k}}{2m+1} + \frac{X_{2\,,\,2k}}{2m+3} + \frac{X_{4\,.\,2k}}{2m+5} + \;.\;.\;.\;.\; + \frac{X_{2m\,,\,2k}}{4m+1} = \frac{1}{2k+2m+1}$$

Решения этой системы очевидны: числа $X_{2q\,,\,2k}$ в случае равных указателей равны 1, а в случае разных указателей равны 0.

$$X_{2k\,,\,2k} = 1 \qquad X_{2q\,,\,2k} = 0 \quad (\text{при } q \neq k) \qquad (9)$$

(Здесь число k может иметь значения $0,1 \ldots m$).

Переходим к определению коэффициентов $a_{2p\,,\,2q}$. Сделаем в формуле (7) $q = 0$ а k последовательно $= 0,1 \ldots m$. Получим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{a_{00}}{1} + \frac{a_{20}}{3} + \frac{a_{40}}{5} + \cdots\cdots + \frac{a_{2m\,0}}{2m+1} = X_{0,0} = 1 \\[2ex]
\frac{a_{00}}{3} + \frac{a_{20}}{5} + \frac{a_{40}}{7} + \cdots\cdots + \frac{a_{2m\,0}}{2m+3} = X_{0,2} = 0 \\[2ex]
\frac{a_{00}}{5} + \frac{a_{20}}{7} + \frac{a_{40}}{9} + \cdots\cdots + \frac{a_{2m\,0}}{2m+5} = X_{0,4} = 0 \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
\frac{a_{00}}{2m+1} + \frac{a_{20}}{2m+3} + \frac{a_{40}}{2m+5} + \cdots\cdots + \frac{a_{2m\,0}}{4m+1} = X_{0,2m} = 0
\end{array}\right\} (10)$$

Эта система дает коэффициенты $a_{2p,2q}$ со вторыми указателями, равными 0.

Чтобы получить те же коэффициенты со вторыми указателями, равными $2,4 \ldots 2m$, делаем в формуле (7) q последовательно равным $1,2 \ldots m$, а k каждый раз $= 0,1 \ldots m$.

Будем иметь ряд систем уравнений аналогичных (10) с тою только разницей, что в правых частях уравнений 1 будет переходить постепенно книзу, а именно:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{a_{0,2}}{1} + \frac{a_{2,2}}{3} + \frac{a_{4,2}}{5} + \cdots\cdots + \frac{a_{2m,2}}{2m+1} = 0 \\[2ex]
\frac{a_{0,2}}{3} + \frac{a_{2,2}}{5} + \frac{a_{4,2}}{7} + \cdots\cdots + \frac{a_{2m,2}}{2m+3} = 1 \\[2ex]
\frac{a_{0,2}}{5} + \frac{a_{2,2}}{7} + \frac{a_{4,2}}{9} + \cdots\cdots + \frac{a_{2m,2}}{2m+5} = 0 \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
\frac{a_{0,2}}{2m+1} + \frac{a_{2,2}}{2m+3} + \frac{a_{4,2}}{2m+5} + \cdots\cdots + \frac{a_{2m,2}}{4m+1} = 0
\end{array}\right\} (10_1)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{a_{0,4}}{1} + \frac{a_{2,4}}{3} + \frac{a_{4,4}}{5} + \cdots\cdots + \frac{a_{2m,4}}{2m+1} = 0 \\[2ex]
\frac{a_{0,4}}{3} + \frac{a_{2,4}}{5} + \frac{a_{4,4}}{7} + \cdots\cdots + \frac{a_{2m,4}}{2m+3} = 0 \\[2ex]
\frac{a_{0,4}}{5} + \frac{a_{2,4}}{7} + \frac{a_{4,4}}{9} + \cdots\cdots + \frac{a_{2m,4}}{2m+5} = 1 \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
\frac{a_{0,4}}{2m+1} + \frac{a_{2,4}}{2m+3} + \frac{a_{4,4}}{2m+5} + \cdots\cdots + \frac{a_{2m,4}}{4m+1} = 0
\end{array}\right\} (10_2)$$

и т. д.

Наконец

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{a_{0,2m}}{1}+\frac{a_{2,2m}}{3}+\frac{a_{4,2m}}{5}+\ldots\ldots+\frac{a_{2m,2m}}{2m+1}=0 \\[2ex]
\frac{a_{0,2m}}{3}+\frac{a_{2,2m}}{5}+\frac{a_{4,2m}}{7}+\ldots\ldots+\frac{a_{2m,2m}}{2m+3}=0 \\[2ex]
\frac{a_{0,2m}}{5}+\frac{a_{2,2m}}{7}+\frac{a_{4,2m}}{9}+\ldots\ldots+\frac{a_{2m,2m}}{2m+5}=0 \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
\frac{a_{0,2m}}{2m+1}+\frac{a_{2,2m}}{2m+3}+\frac{a_{4,2m}}{2m+5}+\ldots\ldots+\frac{a_{2m,2m}}{4m+1}=1
\end{array}\right\} \quad (10m)$$

Все эти системы дадут для коэффициентов $a_{2p,2q}$ вполне определенные величины, так как соответствующие детерминанты каждой системы отличны от нуля.

Нетрудно решить каждую систему в общем случае.

Начнем с системы (10)

Построим числовую функцию

$$\Phi_0\,(2k)=\frac{a_{00}}{2k+1}+\frac{a_{20}}{2k+3}+\frac{a_{40}}{2k+5}+\ldots+\frac{a_{2m0}}{2k+2m+1} \quad (11)$$

В силу уравнений (10) эта функция обладает такими свойствами:

$$\Phi_0\,(0)=1;\quad \Phi_0\,(2)=0;\quad \Phi_0\,(4)=0\ \ldots\ \Phi_0\,(2m)=0$$

Таким образом функция $\Phi_0\,(2k)$ имеет $m-1$ корней : $2,4\ \ldots\ 2m$. Поэтому, если приведем правую часть (11) к одному знаменателю, то числитель обращается в нуль при $2k=2,4\ \ldots\ 2\,m$.

Следовательно

$$\frac{a_{00}}{2k+1}+\frac{a_{20}}{2k+3}+\frac{a_{40}}{2k+5}+\ldots+\frac{a_{2m0}}{2k+2m+1}=$$

$$=C_0\,\frac{(2k-2)\,(2k-4)\ \ldots\ (2k-2m)}{(2k+1)\,(2k+3)\ \ldots\ (2k+2m+1)}$$

Введем обозначения

$$\left.\begin{array}{l}
2k\,(2k-2)\,(2k-4)\ \ldots\ (2k-2m)=f\,(2k) \\
(2k+1)\,(2k+3)\ \ldots\ (2k+2m+1)=F\,(2k)
\end{array}\right\} \quad (12)$$

Тогда

$$\Phi_0\,(2к)=C_0\,\frac{f(2k)}{2k\,.\,F\,(2k)} \quad (13)$$

Свойство $\Phi_0\,(0)=1$ позволяет определить постоянное C_0

$$C_0=\frac{F\,(0)}{f'\,(0)}=(-1)^m\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\ \ldots\ (2m+1)}{2^m\,.\,m!}$$

Заметим, что как в этой формуле, так и в следующих, производная берется по 2k).

Из соотношения (11) получаем величины коэффициентов a_{2p0}

$$a_{2p0} = \Big[(2k+2\rho+1)\;\Phi_0(2k)\Big]_{2k=-(2\rho+1)}$$

$(\rho = 0,1\;.\;.\;.\;m)$

На основании (13)

$$a_{2p0} = -C_0\,\frac{f\,(-2\rho-1)}{(2\rho+1)\,F'(-2\rho-1)} =$$

$$= (-1)^{m-p}\,C_0\,\frac{(2\rho+3)\,(2\rho+5)\;.\;.\;\;(2\rho+2m+1)}{2^m\rho\,!\,(m-\rho)\,!}$$

Чтобы решить систему (10_1), составляем функцию

$$\Phi_2(2к) = \frac{a_{02}}{2k+1} + \frac{a_{22}}{2к+3} + \frac{a_{42}}{2k+5} + \;.\;.\;.\;+ \frac{a_{2m\,.\,2}}{2к+2m+1}$$

Для этой функции

$$\Phi_2(0) = 0;\quad \Phi_2(2) = 1;\quad \Phi_2(4) = 0;\;.\;.\;.\;.\;\Phi_2(2m) = 0.$$

Поэтому

$$\frac{a_{02}}{2k+1} + \frac{a_{22}}{2k+3} + \frac{a_{42}}{2k+5} + \ldots + \frac{a_{2m2}}{2k+2m+1} = C_2\,\frac{f(2k)}{(2k-2)F(2k)}$$

Условие $\Phi_2(2) = 1$ дает

$$C_2 = \frac{F(2)}{f'(2)}$$

А для коэффициента a_{2p2} получаем формулу

$$a_{2p2} = -C_2\,\frac{f(-2\rho-1)}{(2\rho+3)\,F'(-2\rho-1)}$$

Продолжая решение системы (10_q) получим общую формулу для определения коэффициентов $a_{2p,2q}$

$$\left.\begin{aligned} a_{2p,2q} &= -C_{2q}\,\frac{f(-2\rho-1)}{(2\rho+2q+1)\,F'(-2\rho-1)} \\ C_{2q} &= \frac{F(2q)}{f'(2q)} \end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

Введем такие обозначения: произведение последовательных целых чисел от n до n + k будем обозначать символом: n | n + k и произведение целых чисел, из которых каждое больше (или меньше) предыдущего на 2 будем обозначать символом:

$$n(n\pm2)\,(n\pm4)\;.\;.\;.\;(n\pm2k) = n\,\|\,n\pm2k$$

При этом обозначении

$$a_{2p.2q} = (-1)^{m-p}C_{2q}\,\frac{2\rho+1\,\|\,2\rho+2m+1}{(2\rho+2q+1)2^m\rho\,!\,m-\rho)\,!}$$

$$C_{2q} = (-1)^{m-q}\,\frac{2q+1\,\|\,2q+2m+1}{2^m\,q\,!\,(m-q)\,!}$$

так, что окончательно

$$a_{2p,2q} = (-1)^{p+q} \frac{2p+1 \,||\, 2p+2m+1 \,.\, 2q+1 \,||\, 2q+2m+1}{2^{2m}(2p+2q+1)p!\,q!\,(m-p)!\,(m-q)!} \tag{15}$$

Видим, что

$$a_{2p,2q} = a_{2q,2p}$$

что и надо было ожидать вследствие того, что y и z входят в выражение интеграла J(1) симметрично.

Таким образом интеграл J(1) при четных функциях y и z можно приближенно выразить через интегралы от отдельных функций y и z, умноженных на различные степени аргумента посредством формулы (4), в которой A_{2p} и B_{2q} представляют эти отдельные интегралы (2), а коэффициенты $a_{2p.2q}$ даются формулой (15).

Посмотрим теперь какая точность достигается применением выведенной формулы.

Оговоримся, что о точности будем здесь говорить в том же смысле, в каком говорили в статье „Приближенное вычисление определенных интегралов“*) т.-е., будем смотреть, сколько членов разложения (5) совпадает с соответствующими членами разложения (3).

Если обратить внимание на решения (9) уравнений (8) для различных значений чисел к и i, а также на последующие рассуждения, то увидим, что равенство (8) справедливо при всех значениях числа i в случае, если $к = 0, 1, 2 \ldots m$. Это показывает, что в разложениях (5) и (3) совпадают все члены, содержащие $y, y'', y^{IV} \ldots y^{(2m)}$; вследствие того, что в интеграл (1) и в выражение (4) y и z входят симметрично, совпадают и все члены, содержащие $z, z'', z^{IV} \ldots z^{(2m)}$. Поэтому можно сказать, что в разложениях (5) и (3) совпадают все члены, составляющие группы со степенями a^{2i} при $i = 0, 1, 2 \ldots 2m+1$. Из членов же остальных групп (со степенями a^{2i}, при $i > 2m+1$ совпадают в каждой группе $m+1$ первых членов (содержащих y, y'' o $y^{IV} \ldots y^{(2m)}$) и столько же последних членов (содержащих $z, z'', z^{IV} \ldots z^{(2m)}$).

§ 3. Положим теперь, что функции y и z, входящие в интеграл (1) — нечетные. В таком случае

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2к-1)!}\, y^{(2k-1)}; \qquad z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2к-1)!}\, z^{(2k-1)}.$$

и, следовательно,

$$J = 2a \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^{2i}}{2i+1} \sum_{k=1}^{i} \frac{y^{(2k-1)}\, z^{(2i-2k+1)}}{(2к-1)!\,(2i-2к+1)!} \tag{16}$$

Пусть приближенное значение интеграла (1) выражается формулой

$$V = 2a \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} a_{2p-1\,2q-1}\, A_{2p-1}\, B_{2q-1} \tag{17}$$

---

*) Записки Горецкого С. Х. Ин-та, т. 1, стр. 272.

Разлагаем интегралы A_{2p-1} и B_{2q-1} (2) в бесконечные ряды:

$$A_{2p-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2k-1}\, y^{2k-1}}{(2k-1)!\,(2p+2k-1)} \qquad B_{2q-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2k-1}\, z^{2k-1}}{(2k-1)!\,(2q+2k-1)}$$

и подставляем эти разложения в формулу (17).

Получаем

$$V = 2a \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} a_{2p-1,2q-1} \sum_{i=1}^{\infty} a^{2i} \sum_{k=1}^{i} \frac{y^{(2k-1)}\, z^{(2i-2k+1}}{(2k-1)!\,(2p+2k-1)\,(2i-2k+1)!\,(2q+2i-2k+1)} \qquad (18)$$

Для определения коэффициентов $a_{2p-1,2q-1}$, при которых выражение (17) возможно точно представляет величину интеграла J для произвольных функций y и z, сравниваем коэффициенты при различных степенях a и при производных разных порядков от y и z в формулах (16) и (17).

$$\sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} a_{2p-1,2q-1} \frac{1}{(2p+2k-1)(2q+2i-2k+1)} = \frac{1}{2i+1}$$

$(k = 1, 2, \ldots i; \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$

Введя новые промежуточные неизвестные, мы разбиваем последнее равенство на два равенства:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{m} a_{2p-1,2q-1} \frac{1}{2p+2k-1} = x_{2q-1,2k-1} \\ &\sum_{q=1}^{m} x_{2q-1,2k-1} \frac{1}{2q+2i-2k+1} = \frac{1}{2i+1} \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Первое из этих равенств для всякого числа q должно дать нам m уравнений для определения m коэффициентов $a_{2p-1,2q-1}$, а потому даем числу k m значений 1, 2 . . . m.

Второе же равенство (19) должно дать для всякого числа k m уравнений для определения промежуточных неизвестных; поэтому даем числу i m значений: $k, k+1, k+2, \ldots k+m-1$.

Полученные уравнения легко решить и для промежуточных неизвестных получаем такие решения:

$$x_{2k-1,2k-1} = 1; \qquad x_{2q-1,2k-1} = 0 \qquad \text{при } q \neq k)$$

На основании этого первое из равенств (19) дает такую систему уравнений для определения коэффициентов $a_{2p-1,\,2q-1}$ (даем числу k последовательно значения $1, 2, \ldots m$)

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{a_{1,\,2q-1}}{3}+\frac{a_{3,\,2q-1}}{5}+\frac{a_{5,\,2q-1}}{7}+\ldots+\frac{a_{2m-1,\,2q-1}}{2m+1}=0\\[2mm]
\frac{a_{1,\,2q-1}}{5}+\frac{a_{3,\,2q-1}}{7}+\frac{a_{5,\,2q-1}}{9}+\ldots+\frac{a_{2m-1,\,2q-1}}{2m+3}=0\\[2mm]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\[2mm]
\frac{a_{1,\,2q-1}}{2q-1}+\frac{a_{3,\,2q-1}}{2q+1}+\frac{a_{5,\,2q-1}}{2q+3}+\ldots+\frac{a_{2m-1,\,2q-1}}{2q+2m-3}=0\\[2mm]
\frac{a_{1,\,2q-1}}{2q+1}+\frac{a_{3,\,2q-1}}{2q+3}+\frac{a_{5,\,2q-1}}{2q+5}+\ldots+\frac{a_{2m-1,\,2q-1}}{2q+2m-1}=1\\[2mm]
\frac{a_{1,\,2q-1}}{2q+3}+\frac{a_{3,\,2q-1}}{2q+5}+\frac{a_{5,\,2q-1}}{2q+7}+\ldots+\frac{a_{2m-1,\,2q-1}}{2q+2m+1}=0\\[2mm]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\[2mm]
\frac{a_{1,\,2q-1}}{2m+1}+\frac{a_{3,\,2q-1}}{2m+3}+\frac{a_{5,\,2q-1}}{2m+5}+\ldots+\frac{a_{2m-1,\,2q-1}}{4m-1}=0
\end{array}\right\}\quad(20)$$

Эту систему можно решить до конца в общем виде. Для ее решения составим функцию

$$\Phi_{2q-1}\,(2k)=\frac{a_{1,\,2q-1}}{2k+1}+\frac{a_{3,\,2q-1}}{2k+3}+\frac{a_{5,\,2q-1}}{2k+5}+\ldots+\frac{a_{2m-1,\,2q-1}}{2k+2m-1}\quad(21)$$

В силу предыдущих равенств эта функция исчезает для всех последовательных целых значений числа k от 1 до m, кроме значения $k=q$, для которого функция обращается в 1. Поэтому если приведем правую часть к одному знаменателю, то числитель должен быть многочленом $m-1$-ой степени относительно k с корнями $k=1, 2, 3 \ldots\ldots q-1, q+1, q+2, \ldots m$, т.-е., он должен иметь вид

$$C_{2q-1}\,(2k-2)\,(2k-4)\ldots(2k-2q+2)\,(2k-2q-2)\ldots(2k-2m)$$

где C_{2q-1} — независящий от k множитель.

Введем обозначения:

$$f\,(2k)=2k-2\,\|\,2k-2m$$

$$F\,(2k)=2k+1\,\|\,2k-2m-1$$

В таком случае $\Phi_{2q-1}\,(2k)=C_{2q-1}\,\dfrac{f\,(2k)}{(2k-2q)\;F\,(2k)}$ (22)

Но $\Phi_{2q-1}\,(2q)=1$, поэтому

$$C_{2q-1}=\frac{F\,(2q)}{f'\,(2q)}=(-1)^{m-q}\,\frac{2q+1\,\|\,2q+2m-1}{2^{m-1}(q-1)!\,(m-q)!}\quad(23)$$

Коэффициенты $a_{2p-1,\,2q-1}$ определятся из соотношения (21)

$$a_{2p-1,\,2q-1}=\Big[(2k+2p-1)\ \Phi_{2q-1}\ (2k)\Big]_{2k=-(2p-1)}$$

что на основании равенства (22) переходит в

$$a_{2p-1,\,2q-1}=-C_{2q-1}\frac{f(-2p+1)}{(2p+2q-1)\,F'\,(-2p+1)}$$

или

$$a_{2p-1,\,2q-1}=(-1)^{m-p}C_{2q-1}\frac{2p+1\,||\,2p+2m-1}{(2p+2q-1)\ 2^{m-1}\ (p-1)!\,(m-p)!}$$

заменяя множитель C_{2q-1} его значением (23), получаем окончательно

$$a_{2p-1,\,2q-1}=(-1)^{p+q}\frac{2p+1\,||\,2p+2m-1\,.\,2q+1\,||\,2q+2m-1}{2^{2m-2}(2p+2q-1)\,(p-1)!\,(q-1)!\,(m-p)!\,(m-q)!}\qquad(24)$$

опять видим, что все коэффициенты $a_{2p-1,\,2q-1}$ попарно равны между собой

$$a_{2p-1,\,2q-1}=a_{2q-1,\,2p-1}$$

Таким образом при нечетных функциях y и z интеграл J (1) приближенно выражается через интегралы от отдельных функций y и z, умноженных на различные степени аргумента, посредством формулы (17), причем выражения A_{2p-1} и B_{2q-1} даются формулами (2), а коэффициенты $a_{2p-1,\,2q-1}$ — формулой (24).

Чтобы уяснить себе точность формулы (17), заметим, что второе уравнение системы (19) удовлетворяется для любого значения i при m значениях буквы k ($k=1,\ 2\ .\ .\ .\ m$). Следовательно в разложениях интеграла J (16) и приближенного выражения (18), совпадают все члены, содержащие производные $y^{\mathrm{I}},\ y^{\mathrm{III}},\ y^{\mathrm{V}},\ .\ .\ .\ y^{(2m-1)}$ и $z^{\mathrm{I}},\ z^{\mathrm{III}},\ z^{\mathrm{V}},\ .\ .\ .\ z^{(2m-1)}$. Иначе можно сказать так: в разложениях (16) и (18) совпадают все члены, составляющие группы со степенями a^{2i} при $i=1,\ 2,\ .\ .\ .\ 2m$. Из членов же остальных групп (со степенями a^{2i} при $i>2m$) совпадают в каждой группе m первых членов (содержащих $y^{\mathrm{I}},\ y^{\mathrm{III}},\ y^{\mathrm{V}},\ .\ .\ .\ y^{(2m-1)}$ и m последних членов (содержащих $z^{\mathrm{I}},\ z^{\mathrm{III}},\ .\ .\ .\ z^{(2m-1)}$).

§ 4. Рассмотрим теперь общий случай, когда y и z не являются только четными или только нечетными функциями. (Случая, когда одна функция четная, а другая нечетная, не может быть для интеграла (1)).

Если

$$y=f(x)\ ;\ z=F(x),$$

$$\text{то } y=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

$$z=\frac{F(x)+F(-x)}{2}+\frac{F(x)-F(-x)}{2}$$

В каждом из этих двух равенств первое слагаемое представляет собою четную функцию, а второе—нечетную. Поэтому интеграл (1) заменится суммой двух интегралов

$$J=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)+f(-x)}{2}\cdot\frac{F(x)+F(-x)}{2}dx+$$

$$+\int_{-a}^{a}\frac{f(x)-f(-x)}{2}\cdot\frac{F(x)-F(-x)}{2}xd \qquad (25)$$

(Другие два интеграла $=0$).

Первый интеграл берется от произведения четных функций; следовательно, он может быть вычислен по формулам § 2, второй же интеграл берется от произведения нечетных функций, следовательно, он может быть вычислен по формулам § 3.

Заметив, что

$$\int_{-a}^{a}x^{2p}\frac{f(x)+f(-x)}{2}dx=\int_{-a}^{a}x^{2p}f(x)dx=\int_{-a}^{a}x^{2p}ydx$$

$$\int_{-a}^{a}x^{2p-1}\frac{f(x-f(-x)}{2}dx=\int_{-a}^{a}x^{2p-1}f(x)dx=\int_{-a}^{a}x^{2p-1}ydx$$

Заключаем, что выражение A_k для обоих интегралов (25) выражается прежней формулой (2). Тоже, конечно, можно сказать относительно B_k. Поэтому приближенное выражение обоих интегралов можно представить в таком виде:

$$V=2a\sum_{p=0}^{l}\sum_{q=0}^{l}a_{2p,2q}A_{2p}B_{2q}+2a\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}a_{2p-1,2q-1}A_{2p-1}B_{2q-1}$$

где число l может равняться или m или m—1, смотря по тому, какая степень X должна превалировать внутри интегралов A и B — четная или нечетная.

В выражении V можно соединить две двойные суммы в одну двойную

$$V=2a\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}a_{r,s}A_rB_s \qquad (26)$$

Здесь n может быть или четным числом (2m) или нечетным (2m—1); указатели r и s в каждои члене должны быть одновременно или четными или нечетными. Коэффициенты $a_{r,s}$ в случае четных указателей определяются по формуле (15) и в случае нечетных указателей—по формуле (24).

Таким образом получаем общую теорему: Интеграл J(1) от произведения двух функций может быть выражен приближенно через интегралы от отдельных функций, умноженных на различные степени аргумента, посредством формулы (26), в которой A_r и A_s обозначают отдельные интегралы (2), а коэффициенты $a_{r,s}$ с четными указателями даются формулой (15) и с нечетными—формулой (24).

Что касается точности формулы (26), то, как легко усмотреть, в разложениях интеграла (J)

$$J = 2a \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^{2i}}{2i+1} \sum_{k=0}^{2i} \frac{y^{(k)}\, z^{(2i-k)}}{k!\,(2i-k)!}$$

и приближенного выражения

$$V = 2a \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n} a_{r,s} \sum_{i=0}^{\infty} a^{2i} \sum_{k=0}^{i} \frac{y^{(k)}\, z^{(2i-k)}}{k!\,(r+k+1)\,(2i-k)!\,(s+2i-k+1)}$$

совпадают целиком все группы членов со степенями a^{2i} при $i = 0, 1, \ldots n$; в каждой из остальных групп (со степенями a^{2i} при $i > n$) совпадают все $n+1$ первых членов (содержащих y, y', y'', . . . $y^{(n)}$) и все $n+1$ последних членов (содержащих z, z^{I}, z^{II}, . . . $z^{(n)}$).

Легко заметить, что, если y и z будут только четными или только нечетными функциями, то целиком совпадает также группа членов со степенью a^{2i} при $i = n + 1$.

II.

§ 5. Положим, даны отдельные значения одной из функций, напр., y и интегралы от другой функции (z), умноженной на различные степени аргумента.

Положим сначала, что отдельные значения функции y соответствуют определенным значениям аргумента и притом для простоты выбранным так, чтобы они получались отделения отрезка интеграции на четное число ($2m$) равных частей. Если обозначим каждую часть через h, то в формуле (1)

$$a = m h$$

Таким образом считаем данными количества y_k $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm n)$ и интегралы B_s.

Этот случай подробно исследован другими математиками, поэтому я не буду выводить окончательной формулы приближенного выражения интеграла, а ограничусь лишь применением способов предыдущих §§ к выяснению степени точности формулы (в смысле, указанном в упомянутой моей статье), а также указанием, каким образом общая формула может быть получена при посредстве формулы для четных и формулы для нечетных функций y и z.

Положим сначала, что y и z — четные функции. В таком случае приближенное выражение V должно иметь вид

$$V = 2a \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{m} a_{p,\,2q}\, y_p\, B_{2q} \tag{27}$$

где $y_p = f(ph)$, а B_{2q} определяется равенством (2).

Вследствие того, что

$$y_p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho h)^{2k}\, y^{(2k)}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} a^{2k}\left(\frac{\rho}{m}\right)^{2k} \frac{y^{(2k)}}{(2k)!}$$

где $a = mh$, для выражения V получаем:

$$V = 2a \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{m} a_{p,2q} \sum_{i=0}^{\infty} a^{2i} \sum_{k=0}^{i} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{2k} \frac{y^{(2k)}\, z^{(2i-2k)}}{(2k)!\,(2i-2k)!\,(2q+2i-2k+1)} \qquad (28)$$

Мы должны выбрать коэффициенты $a_{p,2q}$ так, чтобы возможно большее число членов последнего разложения совпадало с соответствующими членами разложения (3). Поэтому уравнения для определения коэффициентов будут таковы:

$$\sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{m} a_{p,2k}\left(\frac{\rho}{m}\right)^{2k} \frac{1}{2q+2i-2k+1} = \frac{1}{2i+1}$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots i; \qquad i = 0, 1, 2, \ldots\ )$

При посредстве обозначения

$$\sum_{p=0}^{m} a_{p,2q}\left(\frac{\rho}{m}\right)^{2k} = x_{2q,2k} \qquad (29)$$

эти уравнения перепишутся таким образом:

$$\sum_{q=0}^{m} x_{2q,2k} \frac{1}{2q+2i-2k+1} = \frac{1}{2i+1}$$

где числу i надо дать $m+1$ последовательных значений: k, $k+1$, $k+2, \ldots k+m$.

Видим, что получилась система уравнений (8) поэтому заключаем, что

$$x_{2k,2k} = 1; \qquad x_{2q,2k} = 0 \quad (\text{при } q \neq k)$$

Здесь число k имеет $m+1$ значений: $0, 1, 2, \ldots m$. Очевидно, что при таких значениях числа k решения (9) удовлетворяют условию (8) при всяком i. Это обстоятельство позволяет сделать заключение относительно точности формулы приближенного выражения (27), коэффициенты которой определяются уравнениями (29) (при $k = 0, 1, 2, \ldots m$): в разложениях (28) и (3) будут совпадать все члены, содержащие y,

$y^{II}, y^{IV}, \ldots y^{(2m)}$; иначе: в этих разложениях будут целиком совпадать группы членов (со степенями a^{2i} при $i = 0, 1, 2. \ldots m$, а в остальных группах со степенями a^{2i} при $i > m$) будут совпадать первые $m + 1$ членов (содержащих $y, y^{II}, y^{IV}, \ldots y^{(2m)}$).

В случае нечетности функций y и z приближенное выражение должно иметь вид:

$$V = 2a \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} a_{p,2q-1} \, y_p \, B_{2q-1}$$

или после развертывания в бесконечный ряд:

$$V = 2a \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} a_{p,2q-1} \sum_{i=1}^{\infty} a^{2i} \sum_{k=1}^{i} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{2k-1} \frac{y^{(2k-1)} \quad z^{(2i-2k+1)}}{(2k-1)!\,(2i-2k+1)!\,(2q+2i-2k+1)} \qquad (30)$$

Коэффициенты $a_{p,2q-1}$ определяются условиями:

$$\sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} a_{p,2q-1} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{2k-1} \frac{1}{2q + 2i - 2k + 1} = \frac{1}{2i + 1}$$

$(k = 1, 2, \ldots i; \quad i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Эти условия разбиваются на системы:

$$\sum_{p=1}^{m} a_{p,2q-1} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{2k-1} = x_{2q-1,2k-1}$$

$$\sum_{q=1}^{m} x_{2q-1;\,2k-1} \frac{1}{2q + 2i - 2k + 1} = \frac{1}{2i + 1}.$$

здесь $i = k, k + 1, k + 2 \ldots k + m - 1$.

Последнее равенство совпадает с равенством (19). Поэтому заключаем, что

$$x_{2k-1,2k-1} = 1; \quad x_{2q-1,2k-1} = 0 \quad (\text{при } q \neq k)$$

Равенство (19) справедливо при этих значениях величин $x_{2q-1,2k-1}$ для любого числа i при условии, что $k = 1, 2, \ldots m$. Поэтому заключаем, что в разложениях (30) и (16) совпадают все члены, содержащие $y^{I}, y^{III}, \ldots y^{(2m-1)}$; иными словами: в разложениях (30) и (16) совпадают целиком группы членов со степенями a^{2i} при $i = 1, 2, \ldots m$, а в каждой из остальных групп (при $i > m$) совпадают первые m членов (содержащих $y^{I}, y^{III}, \ldots y^{(2m-1)}$).

Положим теперь, что даны функции y и z общего вида (не только четные или нечетные). Применяя в таком случае прием, изложенный в § 4, найдем для приближенного выражения V такую формулу:

$$V = 2a \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{m} a_{p,2q} \frac{f(\rho h) + f(-\rho h)}{2} B_{2q} +$$

$$+ 2a \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} a_{p,2q-1} \frac{f(\rho h) - f(-\rho h)}{2} B_{2q-1}$$

Отбирая члены с различными значениями функции f, мы можем на основании формулы (2) выражение V представить в таком виде:

$$V = \sum_{q=0}^{m} a_{0,2q} f(0) \int_{-a}^{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{2q} zdx + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{m} f(\rho h) \sum_{s=0}^{2m} a_{p,s} \int_{-a}^{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{s} zdx +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{m} f(-\rho h) \sum_{s=0}^{2m} (-1)^{s} a_{p,s} \int_{-a}^{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{s} zdx \; :$$

Введем обозначения

$$\sum_{q=0}^{m} a_{0,2q} \left(\frac{x}{a}\right)^{2q} = \Phi_0\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{s=0}^{2m} a_{p,s} \left(\frac{x}{a}\right)^{s} = \Phi_\rho\left(\frac{x}{a}\right) \qquad (\rho = 1, 2, \; . \; . \; . \; , m)$$

Тогда для выражения V получим

$$V = \sum_{p=-m}^{m} M_\rho f(\rho h)$$

где $M_\rho = \int_{-a}^{a} \Phi_\rho\left(\frac{x}{a}\right) zdx;$ $\qquad M_{-\rho} = \int_{-a}^{a} \Phi_\rho\left(-\frac{x}{a}\right) zdx;$ $\qquad a = mh$

Очевидно в рассматриваемом общем случае в разложениях интеграла J и приближенного выражения V совпадают все члены, содержащие $y, y^{I}, y^{II}, \ldots y^{(2m)}$, или иначе, совпадают целиком все группы членов со степенями a^{2i} при $i = 0, 1, 2, \ldots m$, а в каждой из остальных групп (при $i > m$) совпадают первые $2m + 1$ членов, содержащие $y, y^{I}, y^{II}, \ldots y^{(2m)}$.

Все результаты рассуждений этого § относятся к случаю когда дано нечетное число значений функции y. Очевидно, подобные же результаты можно получить и для случая, когда дано четное число значений функции y или, все равно, когда отрезок интеграции делится на нечетное число равных частей.

§ 6. В предыдущем § мы предполагали, что значения функции y соответствуют определенным данным значениям аргумента. Положим теперь, что эти значения аргумента не даны и их надо искать так, чтобы получить возможно более точную формулу для приближенного значения интеграла (1). Это—известная задача Гаусса для случая одной под'интегральной функции. Для случая произведения двух под'интегральных функций поставленной задаче посвящена большая работа академика Н. Я. Сонина. В этой работе указывается решение задачи, причем искомыя значения аргумента зависят от вида функции z, т.-е., для каждой функции z должны искаться свои значения аргумента.

Поставим вопрос: какие должны быть значения аргумента для того, чтобы формула приближенного значения интеграла (1) годилась для любой функции z?

Примем сначала, что y и z—четные функции.

Пусть приближенное значение интеграла (1) выражается формулой

$$V = 2a \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{n} a_{p,2q}\, y_p\, B_{2q} \tag{31}$$

где y_p означает значения функции y для неизвестных пока значений аргумента x_p ($\rho = 0, 1, 2, \ldots m$).

Будем искать коэффициенты $a_{\rho,2q}$ и эти значения x_ρ, при которых формула (31) возможно точно выражает величину интеграла (1).

В нашем случае

$$y_p = f(x_p)$$

Разлагаем правую часть в строку Маклорена.

Получаем

$$y_p = \sum_{k=0}^{\infty} x_p^{2k} \frac{y^{(2k)}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} a^{2k} \left(\frac{x_p}{a}\right)^{2k} \frac{y^{(2k)}}{(2k)!}$$

Подставляем это разложение, а также разложение интеграла B_{2q} в формулу (31). Получаем:

$$V = 2a \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{n} a_{\rho,2q} \sum_{i=0}^{\infty} a^{2i} \sum_{k=0}^{i} \left(\frac{x_\rho}{a}\right)^{2k} \frac{y^{(2k)}\, z^{(2i-2k)}}{(2k)!\,(2i-2k)!\,(2q+2i-2k+1)} \tag{31'}$$

Сравнивая это разложение с разложением (3), получаем для определения коэффициентов $a_{\rho,2q}$ и неизвестных x_ρ систему уравнений

$$\sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{n} a_{\rho,2q} \left(\frac{x_\rho}{a}\right)^{2k} \frac{1}{2q+2i-2k+1} = \frac{1}{2i+1} \tag{32}$$

Число неизвестных коэффициентов $a_{p,2q}$ равно $(m+1)$ $(n+1)$ и число неизвестных величин x_p равно m, так как одно из значений x_p, именно x_0, известно (вследствие симметрии тела, об'ем которого выражается интегралом (1), $x_0=0$).

Введем вместо x_p новые неизвестные под условием

$$v_p = \left(\frac{x_p}{a}\right)^2$$

и разобьем уравнение (32) при помощи промежуточных неизвестных $b_{p,i-k}$ на два уравнения

$$\sum_{q=0}^{n} a_{p,2q} \frac{1}{2q+2i-2k+1} = b_{p,i-k}$$

$$\sum_{p=0}^{m} b_{p,i-k} v_p^i = \frac{1}{2i+1}.$$

Берем второе уравнение для $k=i$. Получаем

$$\sum_{p=0}^{m} b_{p,0} v_p^k = \frac{1}{2i+1}$$

Чтобы определить отсюда $m+1$ неизвестных $b_{p,0}$ и m неизвестных v_p, даем числу i $2m+1$ значений: 0, 1, 2, . . . 2m, не забывая, что $v_0=0$. Получаем систему

$$b_{00}+b_{10}+b_{20}+\ldots b_{m0}=1$$

$$b_{10}V_1+b_{20}V_2+\ldots b_{m0}V_m=\frac{1}{3}$$

$$b_{10}V_1^2+b_{20}V_2^2+\ldots+b_{m0}V_m^2=\frac{1}{5}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{10}V_1^{2m}+b_{20}V_2^{2m}+\ldots b_{m0}V_m^{2m}=\frac{1}{4m+1}$$

Эта система совпадает с системою (10) (при $c=1$), полученной мною при выводе формул Гаусса (см. вышеупомянутую статью стр. 259). Поэтому заключаем, что неизвестные V удовлетворяют уравнению.

$$\begin{vmatrix} 1 & V & V^2 & \ldots & V^m \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \ldots & \frac{1}{2m+3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & \ldots & \frac{1}{2m+5} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{2m+1} & \frac{1}{2m+3} & \frac{1}{2m+5} & \ldots & \frac{1}{4m+1} \end{vmatrix} = 0 \qquad (33)$$

Но это уравнение, как я показал раньше (та же статья, стр. 260), определяет неизвестные значения аргумента x, удовлетворяющие задаче Гаусса.

Таким образом выходит, что приближенное выражение V (31) возможно точно выражает величину интеграла (1) от произведения двух функций в том случае, когда обе функции произвольны, для значений аргумента, совпадающими с теми значениями, которые найдены Гауссом для случая одной под'интегральной функции.

Чтобы удобнее по найденным величинам найти величины коэффициентов $a_{p,2q}$, разбиваем уравнение (32) на два таких уравнения:

$$\begin{aligned} &\sum_{p=0}^{m} a_{p,2q} V_p^k = C_{q,k} \\ &\sum_{q=0}^{m} C_{q,k} \frac{1}{2q+2i-2k+1} = \frac{1}{2i+1} \end{aligned} \tag{34}$$

Подставив во второе уравнение вместо i последовательные числа k, $k+1$, $k+2$, . . . $k+n$, найдем значения промежуточных неизвестных $C_{q,k}$

$$C_{k,k} = 1 \qquad C_{q,k} = 0 \qquad (\text{при } q \neq k)$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots n)$$

Имея величины C, легко определить коэффициенты $a_{p,2q}$, стоит только в первом уравнении (34) для всякого числа q дать числу k $m+1$ значений: 0, 1, 2, . m.

В формуле (31) число m дано (число значений функций y); число же n берем возможно большим для достижения наибольшей точности формулы. Покажем, что число n должно равняться числу m.

Положим, что $n > m$. Дадим в первом равенстве (34) числу q какое нибудь значение большее, чем m (но не больше n), напр., $m+1$, а числу k, как полагается, последовательные значния 0, 1, 2, . . m. Получим:

$$\sum_{p=0}^{m} a_{p,2m+2} = C_{m+1,0} = 0; \quad \sum_{p=0}^{m} a_{p,2m+2} V_p = C_{m+1,1} = 0;$$

$$\sum_{p=0}^{m} a_{p,2m+2} V_p^2 = C_{m+1,2} = 0 \ldots \quad \sum_{p=0}^{m} a_{p,2m+2} V_p^m = C_{m+1,m} = 0.$$

Эта система $m+1$ однородных уравнений 1-ой степени с $m+1$ неизвестными. Детерминант этой системы не нуль, а потому все коэффициенты $a_{p,2m+2}$ равны нулю. Видим, что вообще все коэффициенты $a_{p,2q}$ при $q > m$ должны равняться нулю. Отсюда заключаем, что верхний предел для q, т.-е., число $n = m$.

Относительно точности формулы (31) можно сказать следующее: в разложениях выражения V (31′) и интеграла (3) в нашем случае совпадают: 1) все члены, перечисленные в § 5 и 2) последние члены групп со степенями a^{2i} при $i = m+1, m+2, \dots 2m$ (содержащие $y^{(2k)}$, при $k = i$).

§ 7. Положим теперь, что y и z—нечетные функции. В таком случае

$$y_\rho = f(x_\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} a^{2k-1}\left(\frac{x_\rho}{a}\right)^{2k-1}\frac{y^{(2k-1)}}{(2k-1)!}$$

Поэтому приближенное выражение V, равное

$$V = 2a\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m} a_{\rho,2q-1}\, y_\rho\, B_{2q-1} \qquad (35)$$

разлагается в ряд

$$V = 2a\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m} a_{\rho,2q-1}\sum_{i=1}^{\infty} a^{2i}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x_\rho}{a}\right)^{2k-1}\frac{y^{(2k-1)}\, z^{(2i-2k+1)}}{(2k-1)!(2i-2k+1)!(2q+2i-2k+1)}$$

Для определения коэффициентов $a_{\rho,2q-1}$ и величины x_ρ имеем условие

$$\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m} a_{\rho,2q-1}\left(\frac{x_\rho}{a}\right)^{2k-1}\cdot\frac{1}{2q+2i-2k+1} = \frac{1}{2i+1}$$

Разбиваем это условие на два:

$$\sum_{q=1}^{m} a_{\rho,2q-1}\frac{1}{2q+2i-2k+1} = b_{\rho,i-k}\,; \quad \sum_{p=1}^{m} b_{\rho,i-k}\left(\frac{x_\rho}{a}\right)^{2k-1} = \frac{1}{2i+1}$$

Во втором уравнении для k возьмем значение равное i и подставим потом вместо i числа $1, 2, \dots 2m$. Получим систему:

$$\sum_{p=1}^{m} b_{\rho,o}\frac{x_\rho}{a} = \frac{1}{3}\,; \quad \sum_{p=1}^{m} b_{\rho,o}\left(\frac{x_\rho}{a}\right)^{3} = \frac{1}{5}\,; \ \dots \ \sum_{\rho=1}^{m} b_{\rho,o}\left(\frac{x_\rho}{a}\right)^{4m-1} = \frac{1}{4m+1}$$

Берем из этой системы первые $m+1$ уравнений. Получаем систему $m+1$ линейных уравнений с m неизвестными $b_{\rho,o}$. Для совместимости этих уравнений мы должны приравнять нулю детерминант. После сокращений и замены величин x_ρ по формуле

$$V_\rho = \left(\frac{x_\rho}{a}\right)^{2}$$

получаем

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{1}{3} \\ V_1 & V_2 & \dots & V_m & \frac{1}{5} \\ V_1^2 & V_2^2 & \dots & V_m^2 & \frac{1}{7} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_1^m & V_2^m & \dots & V_m^m & \frac{1}{2m+3} \end{vmatrix} = 0$$

Взяв из той же системы $m+1$ уравнений, начиная со второго, с третьего и т. д., получим ряд равенств

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{1}{5} \\ V_1 & V_2 & \dots & V_m & \frac{1}{7} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_1^m & V_2^m & \dots & V_m^m & \frac{1}{2m+5} \end{vmatrix} = 0 \dots \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{1}{2m+1} \\ V_1 & V_2 & \dots & V_m & \frac{1}{2m+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_1^m & V_2^m & \dots & V_m^m & \frac{1}{4m+1} \end{vmatrix} = 0$$

Эти равенства приводят для определения неизвестных V опять к уравнению (33). Поэтому заключаем, что при произвольных нечетных функциях y и z формула (35) ближе всего выражает величину интеграла (1) в том случае, когда аргументу приданы те же значения, как и в формуле (31) для четных функций y и z, т.-е , значения, полученные Гауссом для случая одной под‘интегральной функции.

Такое же заключение на основании § 4 можно сделать и относительно общего случая.

III.

§ 8. Пусть даны значения кадой из функций y и z, соотвествующие определенным значениям аргумента.

Положим, что эти значения аргумента получаются делением отрезка интеграции сначала на четное число $(2m)$ равных частей, так что $a=mh$.

Если y и z—четные функции, то приближенное выражение интеграла (1) будет иметь вид:

$$V = 2a \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{m} a_{p,q}\, y_p\, z_q \tag{36}$$

Разложим произведение $y_p\, z_q$ в бесконечный ряд.

Получим:

$$y_\rho\, z_q = \sum_{i=o}^{\infty} a^{2i} \sum_{k=o}^{i} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{2k} \left(\frac{q}{m}\right)^{2i-2k} \frac{y^{(2k)}\, z^{(2i-2k)}}{(2k)!(2i-2k)!}$$

Поэтому для того, чтобы выражение (36) возможно близко подходило к значению интеграла (1), надо удовлетворить для различных значений k и i достаточное число условий:

$$\sum_{p=o}^{m} \sum_{q=o}^{m} a_{p,q} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{2k} \left(\frac{q}{m}\right)^{2i-2k} = \frac{1}{2i+1} \tag{37}$$

Разбиваем каждое из этих условий на систему двух уравнений

$$\sum_{p=o}^{m} a_{\rho,q} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{2k} = x_{q,2k}\,; \quad \sum_{q=o}^{m} x_{q,2k} \left(\frac{q}{m}\right)^{2i-2k} = \frac{1}{2i+1} \tag{38}$$

Для определения коэффициентов $a_{\rho,q}$ подставляем в первое уравнение для всякого данного числа q $m+1$ значений числа k ($k=0, 1, 2,...m$). Но предварительно надо найти величины $x_{q,2k}$. Их находим из второго уравнения (38), давая для каждого числа к числу i $m+1$ последовательных значений согласно таблице:

k	i
0	0, 1, 2 . . . . . m
1	1, 2, 3 . . . m + 1
2	2, 3, 4 . . . m + 2
. . .	. . . .
m	m, m + 1, . . . 2m

(39)

Очевидно, достаточно определить только половину всего числа коэффициентов $a_{\rho,q}$, потому что в формуле (36) заачения функций y и z должны входить симметрично, так, что $a_{\rho,q} = a_{q,\rho}$.

Это можно доказать таким образом:

условие (37) можно разбить на два уравнения не по способу (38), а так:

$$\sum_{q=o}^{m} a_{\rho,q} \left(\frac{q}{m}\right)^{2i-2k} = y_{\rho,2i-2k}\,; \quad \sum_{p=o}^{m} y_{\rho,2i-2k} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{2k} = \frac{1}{2i+1} \tag{40}$$

Рассматривая вторые уравнения систем (38) и (40), заключаем, что

$$x_{q,2k} = y_{q,2k}$$

Поэтому, если в первом уравнении системы (40) переставим буквы ρ и q, получим

$$\sum_{p=0}^{m} a_{q,p} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{2i-2k} = x_{q,2i-2k}$$

Мы имеем право здесь вместо i взять 2k (см. таблицу (39).
Поэтому

$$\sum_{p=0}^{m} a_{q,p} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{2k} = x_{q,2k}$$

Сравнивая это уравнение с первым уравнением системы (38) убеждаемся в том, что

$$a_{p,q} = a_{q,p}$$

Исследуем точность формулы (36). Рассматривая таблицу (39), мы видим, что 1) для каждого значения i в промежутке от $i = 0$ до $i = m$ для числа k берутся все значения, которые оно может иметь $(0, 1, 2, \ldots m)$, 2) для значения $i = m + 1$ берется для k уже меньше значений $(1, 2, \ldots m)$, для значения $i = m + 2$ берется для k еще меньше значений $(2, 3 \ldots m)$, и, наконец, для $i = 2m$ берется только одно значение $k\,(m)$.

Поэтому относительно разложения в бесконечный ряд приближенного выражения V (36) и разложения интеграла I (3) можно сказать следующее: в этих разложениях 1) совпадают целиком группы членов со степенями a^{2i} при $i = 0, 1, 2, \ldots m$; 2) в группе членов со степенью a^{2m+2} совпадают все члены, кроме крайних (содержащих y и z); 3) в группе членов со степенью a^{2m+4} совпадают все члены, кроме крайних и вторых с начала и с конца и т. д. Наконец, в группе членов со степенью a^{4m} совпадает только по одному среднему члену.

Пример. Для $m = 1$ приближенная формула

$$V = \frac{2h}{15}\left(8y_0z_0 + 2y_0z_1 + 2y_1z_0 + 3y_1z_1\right)$$

точнее формула Симпсона, потому что в разложении ее в ряд и в разложении интеграла (3) совпадают 1) три члена, составляющие группы со степенями a^0 и a^2 (как и для формулы Симпсона: и 2) средний член группы со степенью a^4.

§ 9. В случае нечетных функций y и z приближенное выражение имеет прежний вид (36) с тою только разницей, что теперь $y_0 = z_0 = 0$. Будучи развернуто в ряд, оно будет иметь вид:

$$V = 2a \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} a_{p,q} \sum_{i=1}^{\infty} a^{2i} \sum_{k=1}^{i} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{2k-1} \left(\frac{q}{m}\right)^{2i-2k+1} \frac{y^{(2k-1)}\, z^{(2i-2k+1)}}{(2k-1)!\,(2i-2k+1)\,!} \tag{41}$$

Условие для определения коэффициентов $a_{p,q}$

$$\sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} a_{p,q} \left(\frac{p}{m}\right)^{2k-1} \left(\frac{q}{m}\right)^{2i-2k+1} = \frac{1}{2i+1}$$

$$(k = 1, 2, \ldots i; \quad i = 1, 2, 3 \ldots)$$

разбивается на систему двух уравнений:

$$\sum_{p=1}^{m} a_{p,q} \left(\frac{p}{m}\right)^{2k-1} = x_{q,2k-1}\,; \qquad \sum_{q=1}^{m} x_{q,2k-1} \left(\frac{q}{m}\right)^{2i-2k+1} = \frac{1}{2i+1}$$

Легко видеть, что теперь соответствие между числами k и i, которые необходимо взять для решения системы, укладываются в таблицу:

k	i
1	1, 2, 3, . . . m
2	2, 3, 4, . . . m + 1
3	3, 4, 5, . . . m + 2
. .	. . . .
m	m, m + 1, . . . 2m − 1

Рассматривая эту таблицу можно 1) доказать, что и теперь коэффициенты попарно равны между собой, т.-е., что

$$a_{p,q} = a_{q,p}.$$

и 2) сделать такое заключение относительно разложений в ряды выражения V (41) и интеграла J (28): в этих разложениях 1) совпадают целиком группы членов со степенями a^{2i} при $i = 1, 2, \ldots m$; 2) в группе членов со степенью a^{2m+2} не совпадают только два крайние члена (содержащие y и z); 3) в группе членов со степенью a^{2m+4} не совпадают два крайние и два вторые члена с начала и с конца . . . . Наконец, в группе членов со степенью a^{4m-2} совпадают только по одному среднему члену.

§ 10. Общий случай сводится, как это показано в § 4 к двукратному применению формулы (36)—один раз для четных функций, а в другой раз для нечетных. Если бы мы поставили для рассматриваемого случая (III) ту же задачу, которую трактовали в § 6 для случая (II), то пришли бы к аналогичному заключению; а именно: при произвольных функциях y и z приближенная формула (36) тогда возможно точно представляет величину интеграла (1), когда за значения аргумента x_p взяты те же значения, которые получаются в случае одной под'интегральной функции.

Сделаем последнее замечание для рассматриваемого случая.

Мы предполагали до сих пор, что отрезок интеграции делится на четное число частей. Аналогичным способом можно получить формулы и для случая, когда число частей нечетное $(2m - 1)$ или, все равно, когда число значений каждой функции y и z четное $(2m)$.

Таким способом, напр. для $m = 1$, т.-е. для двух значений каждой функции получаем формулу несколько точнее формулы трапеции:

$$\int_{x_0}^{x_1} y\,z\,dx = \frac{h}{6}(2y_0z_0 + y_0z_1 + y_1z_0 + 2y_1z_1)$$

где $h = x_1 - x_0$, y_0 и z_0 — значения функций для нижнего предела, и y_1 и z_1 — значения функций для верхнего предела.

IV.

§ 11. Приближенную формулу для вычисления интеграла (1) можно получить, комбинируя предыдущие формулы.

Для четных функций y и z в случае, если промежуток интеграции разделен на четное $(2m)$ число равных частей, самой общей будет формула:

$$V = 2a \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{m} \left[a_{p,q}\, y_p\, z_q + b_{p,q}\, y_p\, B_{2q} + C_{q,p}\, z_q\, A_{2p} + d_{p,q}\, A_{2p}\, B_{2q} \right] \tag{42}$$

Разлагая это выражение в бесконечный ряд и, сравнивая полученное разложение с разложением интеграла I (3), получаем систему условий:

$$\sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{m} \left[a_{p,q}\left(\frac{p}{m}\right)^{2k}\left(\frac{q}{m}\right)^{2i-2k} + b_{p,q}\left(\frac{p}{m}\right)^{2k}\frac{1}{2q+2i-2k+1} + \right.$$
$$\left. + C_{q,p}\left(\frac{q}{m}\right)^{2i-2k}\frac{1}{2p+2k+1} + d_{p,q}\frac{1}{(2p+2k+1)(2q+2i-2k+1)}\right] = \frac{1}{2i+1} \tag{43}$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots i;\ i = 0, 1, 2, \ldots)$.

Вводим две серии промежуточных неизвестных:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{p=0}^{m}\left[a_{p,q}\left(\frac{p}{m}\right)^{2k} + C_{q,p}\frac{1}{2p+2k+1}\right] &= x_{q,k} \\ \sum_{p=0}^{m}\left[b_{p,q}\left(\frac{p}{m}\right)^{2k} + d_{p,q}\frac{1}{2p+2k+1}\right] &= y_{q,k} \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Тогда условия (43) примут вид

$$\sum_{q=0}^{m}\left[x_{q,k}\left(\frac{q}{m}\right)^{2i-2k} + y_{q,k}\frac{1}{2q+2i-2k+1}\right] = \frac{1}{2i+1} \tag{45}$$

Каждое из уравнений (44) содержит $2(m+1)$ неизвестных. Значит, чтобы получить достаточное число уравнений, надо для каждого числа q дать числу k $2(m+1)$ последовательных значений $0, 1, 2, \ldots 2m+1$. Но предварительно надо определить промежуточные неизвестные x и y по условию (45). Для этого подставляем в эти условия вместо i ряд последовательных чисел: $k, k+1, k+2, \ldots k+2m+1$. Получаем систему уравнений:

$$\sum_{q=0}^{m}\left[x_{q,k}+y_{q,k}\frac{1}{2q+1}\right]=\frac{1}{2k+1}; \quad \sum_{q=0}^{m}\left[x_{q,k}\left(\frac{q}{m}\right)^{2}+y_{q,k}\frac{1}{2q+3}\right]=\frac{1}{2k+3};$$

$$\sum_{q=0}^{m}\left[x_{q,k}\left(\frac{q}{m}\right)^{4}+y_{q,k}\frac{1}{2q+5}\right]=\frac{1}{2k+5}; \ldots$$

$$\sum_{q=0}^{m}\left[x_{q,k}\left(\frac{q}{m}\right)^{4m+2}+y_{q,k}\frac{1}{2q+4m+3}\right.=\frac{1}{2k+4m+3};$$

Решения этой системы для значений $k = 0, 1, 2, 3, \ldots m$ очевидны. Именно

1) $x_{q,k} = 0$; 2) $y_{k,k} = 1$; 3) $y_{q,k} = 0$ (при $q \neq k$)

для всех значений q и k от 0 до m.

Очевидно, эти решения удовлетворяют условию (45) для любого числа i. Найдя остальные значения промежуточных неизвестных (при $k = m+1, m+2, \ldots 2m+1$), переходим к определению коэффициентов формулы (42) по уравнениям (44).

Легко доказать, что все эти коэффициенты попарно равны между собой. Для доказательства разобьем условие (45) при помощи новых промежуточных неизвестных таким образом:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{q=0}^{m}\left[a_{\rho,q}\left(\frac{q}{m}\right)^{2i-2k}+b_{\rho,q}\frac{1}{2q+2i-2k+1}\right]&=x'_{\rho,-k}\\ \sum_{q=0}^{m}\left[c_{q,\rho}\left(\frac{q}{m}\right)^{2i-2k}+d_{\rho,q}\frac{1}{2q+2i-2k+1}\right]&=y'_{\rho,i-k}\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

$$\sum_{\rho=0}^{m}\left[x'_{\rho,i-k}\left(\frac{\rho}{m}\right)^{2k}+y'_{\rho,i-k}\frac{1}{2\rho+2k+1}\right]=\frac{1}{2i+1} \quad (47)$$

Для определения коэффициентов по уравнениям (46) надо в этих уравнениях для всякого числа ρ дать разности $i-k$ ряд последовательных значений: 0. 1, 2, . . . $2m+1$. Число k имеет, как раз, такие же значения. Поэтому, сравнивая уравнения (45) и (47) между собою, видим, что новые промежуточные неизвестные совпадают с прежними, т.-е., что

$$x'_{\rho,k} = x_{\rho,k} \qquad\qquad y'_{\rho,k} = y_{\rho,k}$$

Если теперь переставим в уравнениях (46) буквы ρ, q и сравним полученные уравнения (при $i-k=0, 1, 2, \ldots 2m+1$) с уравнениями (44) (при $k=0, 1, 2, \ldots 2m+1$), то увидим что

$$a_{\rho,q} = a_{q,\rho}; \qquad b_{\rho,q} = c_{\rho,q}; \qquad d_{\rho,q} = d_{q,\rho}$$

для всех значений ρ и q от 0 до m.

Чтобы обнаружить степень точности формулы (42), выясним соответствие между взятыми числами k и i.

Мы видели, что 1) число k может иметь значения: $0, 1, 2, \ldots 2m+1$; 2) что для всех значений k от 0 до m число i может иметь любое значение и 3) для всякого числа k от $m+1$ до $2m+1$ число i имеет значения: $k, k+1, k+2, \ldots k+2m+1$.

Отсюда вытекает, что 1) для значений $i \leqslant 3m+2$ число k может иметь все значения $(0, 1, 2, \ldots 2m+1)$ и 2) для $i > 3m+2$ число k может иметь те же значения, кроме указанных в прилагаемой таблице:

i	k
$3m+3$	$m+1$
$3m+4$	$m+1, m+2,$
$3m+5$	$m+1, m+2, m+3$
. . . . . .	. . . .
$4m+2$	$m+1, m+2, \ldots 2m$

(48)

Что сказано относительно числа k, то же самое надо сказать и относительно разности $i-k$. Но число $2k$ указывает порядок производных $y^{(2k)}$, а разность $2i-2k$ — порядок производных $z^{(2i-2k)}$ в разложении (3) и в разложении в бесконечный ряд правой части формулы (42). Поэтому заключаем, что в этих разложениях 1) целиком совпадают группы членов со степенями a^{2i} при $i=0, 1, 2, \ldots 3m+2$; 2) в группах членов со степенями a^{2i} при $i=3m+3, 3m+4 \ldots 4m+2$ совпадают все члены, кроме членов, равноотстоящих от начала и конца и содержащих производные $y^{(2k)}$ и $z^{(2k)}$ для тех значений k, которые указаны в таблице (48); 3) в каждой из остальных групп (со степенями a^{2i} при $i > 4m+2$) совпадают первые $m+1$ членов (содержащих $y, y'', \ldots y^{(2m)}$) и последние $m+1$ членов (содержащих $z, z'', \ldots z^{(2m)}$).

Формула (42) выведена для четных функций y и z в случае, когда отрезок интеграции делится на четное число равных частей. Аналогичным способом можно получить формулу для нечетных функпий, а потом по способу § 4 и для любых функций. Можно показать, что все выведенные формулы годятся с небольшими изменениями и для случая, когда отрезок интеграции делится на нечетное число равных частей.

§ 12. Приближенная формула (42) представляет собою самую полную комбинацию формул (4), (27) и (36). Она содержит четыре группы членов: 1) члены с отдельными значениями функций y и z, 2) и 3) члены со значениями одной из функций y и z и интегралами от другой функции, умноженной на различные степени аргумента, 4) члены, содержащие только интегралы от отдельных функций, умноженных на степени аргумента.

Покажем, что кроме комбинации из всех четырех групп (формула 42) возможна еще только одна комбинация, именно, комбинация из первых трех групп. Докажем сначала, что такая комбинация возможна.

Пусть в формуле (42) отсутствует последняя группа или, другими словами, пусть все коэффициенты $d_{p,q}$ равны нулю. В таком случае вторые уравнения систем (44) и (46) будут иметь вид:

$$\sum_{p=0}^{m} b_{p,q}\left(\frac{p}{m}\right)^{2k} = y_{q,k} \; ; \quad \sum_{q=0}^{m} c_{q,p}\left(\frac{q}{m}\right)^{2i-2k} = y'_{p,i-k}$$

Для определения коэффициентов $b_{p,q}$ и $c_{q,p}$ надо в первом из этих уравнений для числа k, а во втором для разности $i-k$ взять $m+1$ последовательных значений 0, 1, 2, . . . m.

Легко показать, что при этих значениях числа k и разности $i-k$, как прежде

$$x'_{p,k} = x_{p,k} \qquad y'_{p,k} = y_{p,k}$$

А потому наши системы дадут одинаковые решения, т.-е.,

$$b_{p,q} = c_{p,q}$$

В таком случае, давая в первом уравнении системы (44) числу k, а в первом уравнении системы (46) разности $i-k$ значения 0, 1, 2, . . . m, получим для коэффициентов $a_{p,q}$ одни и те же, вполне определенные решения.

Системы уравнений (45) и (47) в нашем случае удовлетворяются значениями

$$x_{q,k} = 0 ; \; y_{k,k} = 1 ; \; y_{q,k} = 0 \text{ (при } q \neq k)$$

для любого числа i. Поэтому относительно точности взятой формулы (42) (при $d_{p,q} = 0$) заключаем, что в разложениях правой части этой формулы в бесконечный ряд и в разложении интеграла (3) целиком совпадают группы членов со степенями a^{2i} при $i = 0, 1, 2, \ldots \; 2m+1$, а в каждой из остальных групп (при $i > 2m+1$) совпадают $m+1$ первых и $m+1$ последних членов (содержащих $y, y'', \ldots y^{2m}$ и $z, z'', \ldots z^{2m}$).

Оказывается, что формула, в которую входят все три первые группы членов, т.-е., формула (42) дает такую же точность, как и более простая формула (4), содержащая только одну четвертую группу членов.

Кроме той комбинации из трех первых групп членов формулы (42), существование которой только что доказано, других комбинаций из трех групп, для которых удовлетворялось бы достаточное число условий (43), не существует. Комбинаций же из двух групп нельзя составить ни одной. В справедливости сказанного мы убедимся, если докажем такое положение: отсутствие в формуле (42) одной из первых трех групп членов влечет за собой отсутствие всех трех групп.

Пусть отсутствует в формуле (42), напр., первая группа членов; иными словами, положим, что мы желаем получить формулу, содержащую три последние группы. Это значит, что мы должны в формуле (42) отбросить все члены с коэффициентами $a_{p,q}$. В таком случае первое уравнение системы (44) будет содержать для всякого числа q только $m+1$ неизвестных коэффициентов $c_{q,p}$. Поэтому, чтобы получить достаточное число уравнений для определения этих коэффициентов, надо в формуле (44) дать числу k значения $0, 1, 2, \ldots m$. Помня, что количество $x_{q,k}$ для всех этих значений числа k равно нулю, получим систему

$$\left.\begin{array}{l} \frac{c_{q,0}}{1}+\frac{c_{q\,1}}{3}+\frac{c_{q\,2}}{5}+\ldots+\frac{c_{q\,m}}{2m+1}=0 \\ \frac{c_{q\,0}}{3}+\frac{c_{q\,1}}{5}+\frac{c_{q\,2}}{7}+\ldots+\frac{c_{q\,m}}{2m+3}=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{c_{q\,0}}{2m+1}+\frac{c_{q\,1}}{2m+3}+\frac{c_{q\,2}}{2m+5}+\ldots+\frac{c_{q\,m}}{4m+1}=0 \end{array}\right| \qquad (49)$$

Детерминант этой системы не нуль, а потому все коэффициенты $C_{p,q}$ должны равняться нулю. Выходит, что, если в формуле (42) отбросим члены первой группы (с коэффициентами $a_{p,q}$), то при получении формулы желаемой точности исчезают и члены третьей группы (с коэффициентами $c_{p,q}$). Сейчас увидим, что исчезают также и члены второй группы (с коэффициентами $b_{p,q}$). В самом деле, при $a_{p,q}=0$ в первом уравнении системы (46) остается для каждого числа p только $m+1$ коэффициентов $b_{p,q}$, а потому разности $i-k$ надо дать только $m+1$ значений; $0, 1, 2, \ldots m$; для каждого из этих значений правая часть уравнения (46) обращается в нуль; получаем систему уравнений, аналогичную системе (49). а это приводит к заключению, что все коэффициенты $b_{p,q}$ равны нулю.

Легко показать, что все соображения этого параграфа применимы также сначала для нечетных, а потом и для каких угодно функций y и z.

V.

§ 13. В заключение скажем несколько слов об остаточных членах. Для всех формул приближенных выражений интегралов можно получить остаточные члены, не содержащие производных. Приведем такой член только для формулы (4). Пользуясь формулами (4) и (2), находим формулу приближенвого выраженяя интеграла (1) с остаточным членом в таком виде:

$$\int_0^a yz\,dx=\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{m}\frac{a_{2p\,,\,2q}}{a^{2p+2q+1}}\int_0^a x^{2p}y\,dx\int_0^a x^{2q}z\,dx+R \qquad (50)$$

Составим функцию

$$\Phi(x)=\int_0^x yz\,dx-\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{m}\frac{a_{2p\,,\,2q}}{a^{2p+2q+1}}\int_0^x x^{2p}y\,dx\int_0^a x^{2q}z\,dx-R\frac{x}{a}$$

На основании предыдущего равенства эта функция имеет корень $x = a$. Кроме того ясно, что наша функция имеет корень $x = 0$. Поэтому на основании теоремы Ролля производная $\Phi'(x)$ имеет промежуточный корень, т.-е.,

$$\Phi'(da) = 0$$

где d—положительная правильная дробь.

Но

$$\Phi'(x) = yz - \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{m} \frac{a_{2p,\,2q}}{a^{2p+2q+1}} x^{2p} y \int_{o}^{a} x^{2q} z dx - R \frac{1}{a}$$

Сделав здесь $x = da$ и приравняв результат нулю, найдем для остаточного члена такое выражение:

$$R = ay_d \left[z_d - \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{m} \frac{a_{2p,\,2q}}{a^{2q+1}} d^{2p} \int_{o}^{a} x^{2q} z dx \right]$$

где y_d и z_d суть значения функции y и z для $x = da$.

Преобразуем это выражение. начнем со входящего в формулу интеграла. В виду того, что функция x^{2q} остается все время положительной в пределах интеграции, можем применить теорему о среднем значении:

$$\int_{o}^{a} x^{2q} z dx = z_\theta \int_{o}^{a} x^{2q} dx = \frac{a^{2q+1}}{2q+1} z_\theta$$

где z_θ есть значение функции z для значения аргумента $x = \Theta a$ $(0 \leqslant \Theta \leqslant 1)$

Таким образом

$$R = ay_d \left[z_d - z_\theta \sum_{\rho=0}^{m} \sum_{q=0}^{m} \frac{a_{2p,\,2q}}{2q+1} d^{2p} \right] \tag{51}$$

Двойная сумма, стоящая в правой части, есть ни что иное, как 1. Докажем это.

Вследствие того, что коэффициент $a_{2\rho,2q}$ определяется формулой (15) для всякого числа ρ в промежутке от 0 до m, имеем:

$$\sum_{q=0}^{m} \frac{a_{2\rho,2q}}{2q+1} = (-1)^{\rho} \frac{2\rho+1 \,\|\, 2\rho+2m+1}{2^{2m} \rho\,!\,(m-\rho)!} \sum_{q=0}^{m} (-1)^{q} \frac{2q+3 \,\|\, 2q+2m+1}{(2\rho+2q+1) q\,!\, m-q)!} \tag{52}$$

Сумма, стоящая в правой части, в раскрытой форме имеет вид:

$$\frac{3 \,\|\, 2m+1}{(2q+1)m!} - \frac{5 \,\|\, 2m+3}{(2q+3)(m-1)!} + \frac{7 \,\|\, 2m+5}{(2q+5)2!(m-2)!} - \;.\;.\;.$$

$$+ (-1)^{m} \frac{2m+3 \,\|\, 4m+1}{(2\rho+2m+1)m\,!}$$

или после преобразований:

$$(-1)^m \frac{2m+3 \,\|\, 4m+1}{m\,!}\left[\frac{1}{2\rho+2m+1}-\frac{2m+1 \,|\, 2m}{2(4m+1)(2\rho+2m-1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2m+1 \,|\, 2m-2}{2^2 2!(4m+1)\|(4m-1)\,|\,2\rho+2m-3}-\ldots+(-1)^m\frac{2m+1 \,|\, 2}{2^m m!(4m+1)\|(2m+3)(2\rho+1)}\right] \quad (53)$$

Составим функцию

$$F_\rho(x)=\frac{1\|4m+1}{(2m+1)\,!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{2m+1 \,|\, 2m-2k+2}{2^k k!(4m+1)\,\|\,(4m-2k+3)}\cdot\frac{x^{2\rho+2m-2k+1}}{2\rho+2m-k+1}$$

при чем символы $2m+1 \,|\, 2m+2$ и $4m+1 \,\|\, 4m+3$ считаем равными 1.

Легко видеть, что производная этой функции просто выражается через функцию Лежандра:

$$F'_\rho(x)=x^{2\rho-1}X_{2m+1}$$

Отсюда заключаем, что

$$F_\rho(1)=\int_0^1 x^{2\rho-1}X_{2m+1}\,dx.$$

Это равенство показывает, что

$$F_\rho(1)=0 \text{ для } \rho=1,2,\ldots m.$$

Для дальнейшего нам надо иметь еще значение функции F_0 (1)

$$F_0(1)=\int_0^1 x^{-1}X_{2m+1}\,dx$$

Этот интеграл есть функция числа m; обозначим ее так:

$$I_{2m+1}=\int_0^1 x^{-1}X_{2m+1}\,dx$$

Как известно, функция Лежандра может быть выражена через производные двух последовательных функций посредством соотношения

$$X_{2m+1}=\frac{x}{2m+1}X^1_{2m+1}-\frac{1}{2m+1}X^1_{2m}$$

Поэтому

$$(2m+1)I_{2m+1}=\Big|X_{2m+1}\Big]_0^1-\int_0^1 x^{-1}X^1_{2m}\,dx$$

Но все функции Лежандра для $x=1$ обращаются в 1.

Это можно усмотреть из того, что женератрисой функции Лежандра служит выражение

$$(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}},$$

которое для $x=1$ обращается в $\frac{1}{1-z}$, а эта дробь, будучи развернута в ряд, дает для всех коэффициентов значения $=1$.

Таким образом получаем

$$(2m+1)\,I_{2m+1}=1-\int_0^1 x^{-1}X_{2m}^1\,dx$$

Но производная четной функции Лежандра выражается через последовательные нечетные функции (Бертран. Дифференциальное исчисление, стр. 355).

$$X_{2m}^1=(4m-1)\,X_{2m-1}+(4m-5)\,X_{2m-3}+(4m-9)\,X_{2m-5}+\ldots+3\,X_1$$

Поэтому

$$(2m+1)\,I_{2m+1}=1-(4m-1)\,I_{2m-1}-(4m-5)\,I_{2m-3}-(4m-9)\,I_{2m-5}\ldots-3\,I_1$$

Заменив здесь m через $m-1$, получим

$$(2m-1)\,I_{2m-1}=1-(4m-5)\,I_{2m-3}-(4m-9)\,I_{2m-5}-\;.\;\;.\;\;.\;3\,I_1$$

Последние два равенства дают простую рекурсионную формулу для определения функции I_{2m+1}

$$(2m+1)\,I_{2m+1}=-2m\,I_{2m-1}$$

Вследствие того, что

$$I_1=\int_0^1 x^{-1}X_1\,dx=1$$

рекурсионная формула дает

$$3\,\|\,(2m+1)\,.\,I_{2m+1}=(-1)^m\,2\,\|\,2m$$

а потому

$$F_0(1)=(-1)^m\,\frac{2^m\,m!}{1\,\|\,\overline{2+1}}\,.$$

Не трудно видеть, что выражение (53) есть

$$(-1)^m\,2^m\,F_\rho\,(1)$$

Поэтому это выражение исчезает для всех значений ρ от 1 до m, а для $\rho=0$ оно обращается в дробь

$$\frac{2^{2m}\,m!}{1\,\|\,\overline{2m+1}}$$

Отсюда выходит, что вторая часть равенства (52) обращается в нуль для значений $\rho = 1, 2, \ldots m$, и в 1 для значения $\rho = 0$, так что

$$\sum_{q=0}^{m} \frac{a_{2p,2q}}{2q+1} = \begin{cases} 0 \text{ (для } \rho = 1, 2, \ldots m) \\ 1 \text{ (для } \rho = 0) \end{cases}$$

а это и доказывает, что двойная сумма, стоящая в правой части равенства (51) есть 1. Поэтому для остаточного члена формулы (4) получим выражение

$$R = a\, y_d \left[z_d - z_\theta\right] \tag{54}$$

Очевидно, остаточный член можно представить и в такой форме

$$R = a\, z_d \left[y_d - y_\theta\right) \tag{54^1}$$

И. Богоявленский.

Calcul des intégrales du produit de deux fonctions.

L'intégrale approchée du produit de deux fonctions peut s'exprimer 1) par les intégrales des fonctions séparées, muttipliées par les différentes puissances d'argument, 2) par les valeurs d'une fonction et les intégrales de l'autre, multipliées par les poissances d'argument, 3) par les valeurs de l'une et de l'autre fonction. En outre it n'y a que deux formules combinées.

Pour toutes les formules est indiqué le degré d'exactitude.

Il est possible d'exprimer l'intégrale du produit des fonctions quelconques par deux intégrales—l'une contenante des fonctions paires et l'autre contenante des fonctions impaires. C'est pourquoi on considère d'abord le cas des fonctions paires et ensuite celui des fonctions impaires.

La formule approchée donne pour l'intégrale du produit des fonctions arbitraires le résultat le plus précis, quand on prend pour l'argument les mêmes valeurs, qu'a trouvées Gauss pour le cas d'une fonction intégrable. Il est possible de recevoir pour toutes les formules des membres restants sans les dérivées des fonctions.

J. B.

II.

К изучению интенсивности лесного хозяйства.

(Опыт количественного анализа).

ВСТУПЛЕНИЕ.

1. Понятие интенсивности и ее определения

(Рошер, Арнольд, Рудзкий и Орлов).

В лесной экономике имеется ряд вопросов, не только мало разработанных, но и слабо освещенных. К числу этих вопросов, между прочим, относится и вопрос об интенсивности лесного хозяйства. Необходимость его освещения и разработки признается всеми, так как практикуемый шаблонный способ хозяйствования в лесах не дает хороших результатов. Те или иные технические мероприятия, связанные с интенсификацией хозяйства, непременно должны быть географически локализованы.

Для этого необходимо расчленить экономический ландшафт лесного хозяйства на районы большей или меньшей степени интенсивности.

„В иных случаях,—писал В. Рошер*),—обрабатывается известное пространство земли с меньшею затратой труда и капитала, в других—с большею. Чтобы различить эти два рода хозяйства, принято называть первое—экстенсивным, второе—интенсивным“.

Тот-же автор считал, что главное отличие лесного хозяйства, не смотря на большое его сходство с сельским, состоит в том, *что оно всегда менее интенсивно, нежели сельское хозяйство вообще, при одинаковых условиях почвы, положения и времени.* (Курсив В. Рошера).

Ф. К. Арнольд**) указывал, что „для употребления труда и капитала в хозяйстве есть предел, который переступить нельзя или который делает производство убыточным“.

„Те хозяйства,—говорил Ф. Арнольд,—в которых употребляется на единицу площади земли мало капиталов и работ, называют *экстенсивными хозяйствами* (простыми или грубыми); напротив, где завязывается на единицу площади земли много капиталов и работ, называют хозяйствами *интенсивными* (напряженными или утонченными)“.

А Ф Рудзкий***) также определял экстенсивное хозяйство, как такое, где „участие капитала и труда очень мало“.

„Интенсивность хозяйства,—говорит М. М. Орлов****),—обусловливается затратой труда и капитала“.

Мы не будем далее приводить определения интенсивности лесного хозяйства.

Понятие интенсивности, как мы видим, выяснено, хотя и в общей форме.

---

*) См. „Сельское хозяйство и лесоводство“. Март 1865 г.

**) См. „Оценка действующих в лесах капиталов и достигаемых ими результатов“. 1884 года.

***) См. Руководство к устройству русских лесов“. Изд. 3-е 1906 г.

****) См. „Лесоустройство“. 1911 г.

Для нас важно, в настоящее время, не определение понятия „интенсивности“, а самое ее измерение.

Сказать „мало“ или „много“ труда или капитала на единицу площади—это значит дать чрезвычайно расплывчатое определение.

Для лесной экономики необходимы, как и для всякой науки, не только самые измерители того или иного явления, но и их количественное выражение.

Лесная экономика производит количественный анализ явлений и, характеризуя качество, она дает для него определенные „качественные цифры“, являющиеся ни чем иным, как, опять-таки, количественным выражением цены единицы об‘ема древесины.

Всякое научное, об‘ективное познание требует применения единиц меры, веса и числа. И говоря об интенсивности лесного хозяйства, в лесной экономике, мы должны не только указать „измерители“ этой интенсивности, но и дать им численное выражение. Иначе, мы не будем знать, с каким именно хозяйством мы имеем дело: с экстенсивным или интенсивным.

Пока не будут найдены, для известного времени и пространства, численные показатели интенсивности, до тех пор самая оценка будет только суб‘ективной.

I.

> „*Die Forstwirtschaft ist arbeitsextensiv*“.
>
> M. Endres.

Трудо-интенсивность (*arbeitsintensiv*) **лесного хозяйства. Виды труда и их количественное выражение** (в БССР и Германии, по Эндресу).

Из сказанного выше видно, что „интенсивность лесного хозяйства“ характеризуется концентрацией „труда и капитала“ на единицу площади.

Следовательно, расчленяя самое понятие интенсивности на его составные элементы, мы можем говорить, во-первых, о „*трудо-интенсивности*“ и, во-вторых, о „*капитало-интенсивности*“, при чем каждая из них будет измеряться либо степенью концентрации труда (количеством трудовых единиц-тред), либо степенью концентрации капиталов в лесном хозяйстве (размером отдельных видов капитала).

Обозначая интенсивность лесного хозяйства через I, трудо-интенсивность через T_i и капитало-интенсивность через K_i, будем иметь такую формулу:

$$I = T_i + K_i \quad . \; . \; . \; (1)$$

По этой формуле интенсивность лесного хозяйства представляет собою простую сумму концентрации труда и капитала на единицу площади производственной территории хозяйства.

Трудо-интенсивность лесного хозяйства, иначе, его „трудоёмкость“, конечно, различна и зависит от многих причин, в том числе и от применяемых в лесоводстве видов труда.

Поэтому, говоря о трудо-интенсивности лесного хозяйства, приходится расчленять ее на отдельные виды, применительно к характеру работ. Так, необходимо различать труд административный (администрация и охрана леса), труд лесокультурный (по возобновлению леса), труд по эксплоатации леса (валка и заготовка).

Обозначая виды труда, по их характеру, получим:

$$T_i = t_a + t_c + t_e \quad . \; . \; . \; (2)$$

Труд по воссозданию дорожных и мостовых сооружений, а равно и постройке домов в лесничествах, может быть отнесен или к труду административному (дома для стражи и проч.) или к труду по эксплоатации (дороги, мосты).

Пользуясь приведенной (2) формулой, мы можем конкретно исчислить „трудо-ёмкость“ того или иного хозяйства.

Возьмем, напр., Бобруйскую дачу: в ней общее число лиц, ведущих административную работу равно 25 (лесничий, помощник, два канцелярских работника, три об‘ездчика и восемьнадцать лесников). Считая, что все они имеют в году по 300 восьми-часовых рабочих дня, при 65-ти нерабочих днях, получим для дачи, имеющей 6.910 десятин удобной лесной площади, такое количество рабочих дней на единицу территории (производственной):

$$t_a = \frac{25 . 300}{6 . 910} = 1{,}08 \text{ р. дн. на 1 дес.}$$

Лесокультурный труд в Бобруйской даче в 1925 году выразился в закультивировании: путем посева сосны на площади 121,54 дес. и посадки на 10,53 дес. (всего 132,07 дес.).

Принимая, в среднем, около 20 раб. дней на 1 дес. лесокультур, получим количество труда на единицу площади:

$$t_c = \frac{132{,}07 . 20}{6 . 910} = 0{,}39 \text{ раб. дн. (тред).}$$

Труд по эксплоатации леса (t_e) выражается количеством рабочих дней, затраченных на валку и заготовку леса. Это количество рабочих дней, как известно, изменяется, в зависимости от погоды, высоты и полноты леса. Беря сосновое насаждение в возрасте эксплоатации (120 лет) лучших бонитетов (I и II), занимающих около 80% всей площади, получим для 1 дес., при средней полноте, годовое количество рабочих дней, без корчевки:

$$t_e = \frac{255 . 0.6}{120} = 1{,}27 \text{ раб. дн. (годов.).}$$

ПРИМЕЧАНИЕ. Норма в 255 раб. дней для вырубки 1 дес. соснового леса, при высоте 12 саж., при средней полноте, с корчеванием пней, обрубкой сучьев, отрезкой вершин и складыванием заготовленных материалов и проч., уменьшена на 40%, т. е. произведено редуцирование.

Итак, общая трудоёмкость единицы площади Бобруйской дачи, суммируя указанные важнейшие виды труда в лесном хозяйстве, выразится цифрой:

$$T_i = 1{,}08 + 0{,}39 + 1{,}27 = 2{,}74 \text{ раб. дн.}$$

К. Покалюк считал „годовую работодательную способность“ 1 дес. леса равной 2,5 раб. дн. (см. „Лесопромышленный Вестник“. 1911 г. № 28).

В Саксонии, по вычислениям Ф. Юдейха, требовалось от 2,4 до 9,1 рабочих дней.

По новейшим данным*), для лесного хозяйства Баварии на 1 гектар

---

*) См. „Die Forstwirtschaft“. Herausgegeben im 1922 vom Reichswirtschaftsrate. Berlin SW 11.

требуется 5,53 раб. дн. (Arbeitstage), в Пруссии—4,00 раб. дн.; в средн. же, 4,33 раб. дн. на единицу хозяйства (1 гект.) или 4,75 рабочих дней на 1 десятину.

Таким обрязом, сравнение приведенных для Германии цифр, характеризующих трудоёмкость лесного хозяйства, с таковыми же для СССР, показывает, что трудо-интенсивность нашего хозяйства почти вдвое менее трудо-интенсивности немецкого лесного хозяйства (56%).

Max Endres, профессор Мюнхенского Университета, в своей книге*) „Handbuch der Forstpolitik“ приводит для баварского лесного хозяйства такое количество рабочих дней на 100 гектаров:

	Ihar 1908.	Iahr 1910.
Für Holzernte . . .	315 = 57% . . .	328 = 56%
„ Wegbauten . .	71 = 13 „ . . .	87 = 15 „
„ Forstkulturen . .	134 = 24 „ . . .	136 = 23 „

Из этих данных видно, что наибольшее количество труда падает на эксплоатацию, рубку леса (Holzernte), потом идут лесные культуры (Forstkulturen) и, наконец, дорожное строительство (Wegbauten).

Если сравним приведенные выше данные для Бобруйской дачи с данными для Баварии, то получим такое сопоставление для эксплоатационного и лесокультурного видов труда:

	Лесное хозяйство Баварии	Лесное хозяйство Белоруссии
Эксплоатация леса . . .	56 — 57% . . .	48%
Лесные культуры . . .	23 — 24 „	14 „

Административный труд в Бобруйской даче, считая ее, более или менее типичной для БССР, составляет около 38%.

Ppof. Endres говорит о лесном хозяйстве, квалифицируя его, как „*трудо-экстенсивное*“ („Die Forstwirtschaft ist arbeitsextensiv“).

Сравнивая лесное хозяйство с сельским, проф. Эндрес приводит такие данные:

а) в сельском хозяйстве 1 постоянный рабочий приходится на 2-7 гектаров;

б) в лесном хозяйстве—на 45-80 гектаров.

При этом рассчет сделан на целый год („während eines Iahres“), имея в виду значительные площади государственных лесов („in den grösseren Staatsforstverwaltungen“).

Примерное отношение концентрации труда в лесном и сельском хозяйстве, равно 1 : 15 (13,9).

II.

Капитало-интенсивность *(kapitalintensiv)* лесного хозяйства. Виды капитала и их количественное выражение (в лесах Белоруссии).

... Капитало-интенсивность лесного хозяйства измеряется размерами капиталов, завязанных в хозяйстве: древесным запасом (Holzvorrat), дорожно-мостовыми сооружениями или средствами (die Kommunikations- und Transportmittel), постройками (die Gebäude), а также разными маши-

---

*) Berlin. Verlad von Iulius Springer. 1922. S. 55.

нами, орудиями и инструментами (Instrumente und Maschinen). Сюда же (к числу капиталов) следует отнести и расходы на заработную плату (рабочим и служащим).

Важнейшим капиталом является—древесный запас („das wichtigste Kapital ist der Holzvorrat").

По поводу этого вида капитала существуют разногласия в лесной литературе. Так, один из корифеев немецкой лесной науки, проф. А. Шваппах считает, что лесное хозяйство нуждается „сравнительно с сельским хозяйством, в значительно большем *оборотном* капитале, в древесном запасе" (см. „Лесная политика", стр. 15).

В то же время проф. М. Орлов говорит, что „по отношению к *основному* капиталу лесное хозяйство пред‘являет весьма высокие требования" (см. „Лесоустройство", стр. 10).

Max Pressler выделял особо древесный капитал (H) и основной (G), который определялся им, как сумма капиталов почвенного и административного (B + V).

Это разделение „*капитала в лесном хозяйстве*", совершенно оторванное от экономической науки и возможное лишь для 18 столетия, было недавно вновь принято одним из русских лесных авторов*).

Лесная экономика не должна отставать от современной науки. Ф. Юдейх, в своем предисловии к первому изданию говорил, что „ныне лесоустройство не должно уклоняться от влияния открытых в новейшее время основных экономических истин" (см. „Лесоустройство").

Тем более, не должна уклоняться от них лесоэкономика.

Лесоводы конца прошлого и начала нынешнего столетия приняли классификацию старой, классической политической экономии, по которой капиталы разделяются на основной и оборотный.

По нашему мнению**), необходимо в настоящее время отбросить эту классификацию и ввести новую, котарая была предложена в науке К. Марксом.

По этой классификации капитал разделяется на постоянный и переменный.

Чтобы наглядно представить различие между этими классификациями, в интересах правильного отнесения *древесного запаса*, к тому или другому виду капитала, приведем нижеследующую схему:

Капиталы:

По Марксу.		По Смиту.	
I. Постоянный капитал	1) Материалы. 2) Орудия, машины, здания.	I. Основной капитал.	Орудия, машины, здания.
II. Переменный капитал	Заработная плата.	II. Оборотный капитал:	1) Материалы. 2) Плата рабочим.

... Из этой схемы мы видим, что древесный запас, как материал, относится к оборотному капиталу, следуя старой, классической школе

---

*) И. Яценко. „Лесоустройство и теория почвенной ренты". (Журнал „Лесное хозяйство, лесопромышленность и топливо". № 5-6. 1926 г.).

**) Проф. В.И. Переход. „Постоянный и переменный капитал в лесном хозяйстве" (Журнал „Лесовод". Москва. № 2. 1926 г.).

экономистов, или же к постоянному, принимая деление новой, нео-классической школы.

Мы делим капитал в лесном хозяйстве на постоянный и переменный, причем, принимая указание К. Маркса*), различаем в постоянном капитале: а) основную часть (здания, машины, орудия) и б) оборотную (сырой материал).

Капиталы в лесном хозяйстве:

(Роды и виды).

I. Постоянный капитал:		II. Переменный капитал
а) Основная часть.	б) Оборотная часть.	Заработная плата рабочим и служащим (V).
Капитал в постройках, сооружениях и инвентаре (K_m).	Древесный запас (H).	

Кроме указанных видов капитала (K_m, H и V), в лесном хозяйстве имеют еще место: почвенный капитал, выражающий стоимость почвы (B) и (C) культурный капитал, равный сумме единовременного расхода „k“ и капитала, приносящего каждые „u“ лет проценты = k, т. е.:

$$C = K + \frac{k}{1{,}0\rho^{u} - 1} \quad . \; . \; . \; (3)$$

Обычно, однако, для определения капиталов в лесном хозяйстве пользуются следующей общей формулой:

$$K = \frac{k}{0{,}0\rho}$$ (капитализация доходов или расходов в лесном хозяйстве)

где „K“ есть определяемый капитал, а „k“ (малое)—доход или расход при $\rho\%$ (норма роста, равная 2,5—3%).

Если мы включим культурный капитал в оборотную часть постоянного капитала, а почвенный капитал присоединим к основной части того-же рода капитала, то получим такие выражения:

1) P_1 (постоянный капитал) $= (B + K_m) + (H + C)$.

2) P_2 (переменный капитал) = V (капитализованный расход на зарплату).

...В найденном первом выражений первая часть $(B + K_m)$ является основной частью постоянного капитала, а вторая $(H + C)$ — оборотной.

Вся же сумма капиталов в лесном хозяйстве, которой измеряется „капитало-интенсивность“ равна:

$$P = H + V + C + K_m + B \quad . \; . \; . \; (4)$$

Если будем определять по этой формуле „капитало-интенсивность“ взятой нами выше, для примера, Бобруйской лесной дачи, то получим, путем капитализации доходов и расходов:

$$H \text{ (древесн. капит.)} = \frac{r \text{ (лесн. ренте)}}{0{,}0\rho} = \frac{3{,}84}{0{,}03} = 128 \text{ руб.}$$

---

*) „Капитал“. Критика политической экономии. Т. III. ч. 1-я.

$$V\ (\text{админ. кап.}) = \frac{v}{0{,}0p} = \frac{1{,}04}{0{,}03} = 34{,}6\ \text{руб.}$$

ПРИМЕЧАНИЕ. Первый капитал (Н) относиття к „постоянному“, а второй (v) к к переменному.

Капитальная стоимость всех сооружений в Бобруйской лесной даче выражается цифрой 12.600 руб., а инвентаря 1.408 руб. (по актам).

При переводе на единицу площади производственной территории хозяйства получим размер основной части постоянного капитала (K_m), равный 2,02 руб.

Расход на культуры и лесовозобновление, в переводе на 1 дес., дает такие цифры: а) уход за лесом — 2,6 коп. и б) лесовозобновление — 8,5 коп., а всего 11,1 коп.

Отсюда, путем капитализации расхода, получим размер культурного капитала на единицу площади:

$$C = \frac{k}{0{,}0p} = \frac{11{,}1}{0{,}03} = 3{,}7\ \text{руб.}$$

Почвенный капитал (В), вследствие отсутствия данных почвенной ренты, определим, в зависимости, от древесного капитала (Н), беря 15%, что даст нам цифру почвенного капитала (стоимости почвы) в 19,2 руб.

Итак, капитало-интенсивность лесного хозяйства в Бобруйской даче определится в сумме:

Постоянный капитал:				Переменный капитал	Всего (в руб.)
Основная часть		Оборотная часть			
K_m	В	Н	С	V	
2,02	19,2	128,0	3,7	34,6	187,52

В главе „Kapital“ проф. Эндрес*) приводит такие размеры капитала на единицу площади хозяйства (1 гект.): а) для Баварии—568 mark; б) для Бельгии—594 м.; в) для Франции—950 м; для Бадена—990 м.; д) для Саксонии—1152 м.

При этом следует отметить, что „капитало-интенсивность“ высокоствольников значительно выше низкоствольного леса („Die kapitalextensivste Form ist der Niederwald“).

III.

Органическое строение капитала в лесном хозяйстве. Формулы Глазера для определения древесного и почвенного капитала.

„Под составом капитала мы понимаем,—писал К. Маркс**),—отношение между его активною и пассивною составною частью, между переменным и постоянным капиталом“... И далее: „...различный состав капиталов не зависит от их абсолютной величины. Вопрос состоит всегда лишь в том, сколько из каждых 100 единиц капитала приходится на переменный и сколько на постоянный капитал“.

По отношению к нашей лесной даче, отношение между постоянным и переменным капиталом в лесном хозяйстве будет равно:

$$p_1 : p_2 = (187{,}52 - 34{,}6) : 34{,}6 = 4{,}4 : 1$$

---

*) „Forstpolitik“. Zweite Auflage. Berlin. 1922.

**) „Капитал“. Т. III. ч. 1-я. Стр. 122-я и 126-я.

...Иными словами, размер постоянного капитала превосходит переменный капитал в 4,4 раза.

Таким образом, создается впечатление, что капиталы в лесном хозяйстве имеют „высшее органическое строение".

Между тем, это далеко не так. К. Маркс раз'яснил нам, что „в стоимости дерева содержится больший избыток неоплаченного труда или прибавочной стоимости, чем в продукте капиталов более высокого состава" („Капитал". Т. III ч. 2-я).

Если мы возьмем к.-н. лесной товар (напр, бревно или шпалу, заготовленные в лесу) и представим себе весь процесс производства этого товара, то роль переменного капитала, в форме труда рабочего, будет ясна.

Мы считаем поэтому, что, по отношению к лесному хозяйству, нужно брать соотношение только между основной частью постоянного капитала ($K_m + B$) и капиталом переменным (V).

Это соотношение бутет иным, а именно:

$$(K_m + B) : V = \frac{21{,}22}{34{,}6} = 0{,}61 \left(\frac{61}{100}\right)$$

Стало-быть, из каждых 100 единиц капитала на основную часть приходится 39 (постоянный капитал) и на переменный капитал 61, т.е.,

$$K = 39p_1 + 61p_2$$

Если же мы исключим и „почвенный капитал" (B), то соотношение между „основной частью постоянного капитала" (K_m) и переменным капиталом, выраженное в $^0/_0$ $^0/_0$ будет равно:

$$100 . \frac{K_m}{V} = \frac{2{,}02}{34{,}6} \cdot 100 = 5{,}8\%$$

Как известно, постоянный капитал доставляет только „средства производства", то вещество, которое необходимо рабочей силе для создания ценностей, тогда как переменный капитал есть денежное выражение „необходимого рабочего времени".

Мы можем, поэтому, *интенсивность лесного хозяйства измерять суммой постоянного и переменного капиталов*, ибо величина переменного капитала выражается произведением необходимого рабочего времени для одного работника на число рабочих, занятых в лесоводстве.

Иными словами, *интенсификация лесного хозяйства будет заключаться в увеличении постоянного и переменного капитала на единицу площади.*

Основными элементами, к которым прилагается труд (переменный капитал) в лесном хозяйстве, является: почва (Boden) и насаждение (Holzbestand).

В этом смысле, и было дано определение „леса" проф. Эндресом*): „Unter Wald versteht man den Boden mit dem darauf stockenden Holzbestand". (Под лесом понимают почву с произрастающими на ней насаждениями)

Dr. Theodor Glaser**) в своей интересной книжке: „Die Berechnung des Waldkapitals" дает такую, небольшую, но весьма удобную формулу для вычисления древесного капитала:

$$A_x = M_x . Q_x \quad . \; . \; . \; (4)$$

---

*) „Lehrbuch der Waldwertrechnung und Forststatik". Berlin. 1923.

**) „Die Berechnung qes Waldkapitals und ihr Einflus auf die Forstwirtschaft in Theorie und Praxis". Berlin.

Здесь, древесный капитал обозначен через A_x, запас через M_x (в возрасте „x“), а качественная цифра (Qualitätsziffer) через Q_x.

Так, для Бобруйской дачи, которую мы анализируем, по отношению к сосновым насаждениям I-го класса бонитета, древесный капитал (A_x) равен:

Возраст:	80	90	105	110 лет.
Масса (M_x) . .	14.673,66	16.564,1	17.999,36	18.533,48 куб. фут.
Кач. цифра (Q_x).	12,48	13,23	14,25	14,05 копеек.
Древ. кап. (A_x) .	1.833,96	2.192,75	2.564,92	2.604,07 рублей.

...Качественная цифра (Qualitätsziffer) обычно исчисляется при всех лесоустроительных работах, точно также, как и масса (M_x); стало быть мы имеем все, что необходимо для определения древесного капитала насаждений старше 40 лет, по Глазеру (für die älter als 40—jâhrigen Bestände).

Для определения „стоимости почвы“ (des Wertes des Waldbodens) под лесом тот-же Теодор Глазер предлагает такую формулу:

$$B = \frac{A_{40} + \Sigma Dbis_{40}}{2} \quad . \ . \ . \ (5).$$

В этой формуле „A_{40}“ есть древесный капитал в возрасте 40 лет, „$\Sigma Dbis_{40}$“—есть сумма древесного запаса, извлеченная из насаждения до 40 лет (bis 40). Будучи величиной незначительной, последняя величина может быть игнорирована, и тогда почвенный капитал (B) определится, как половина стоимости древесного запаса в возрасте 40 лет: $B = A_{40} : 2$.

Стоимость лесонасаждения в возрасте 40 лет может быть определена, зная размер древесного капитала в старшем возрасте (A_x)

$$A_{40} = \frac{A_x}{x^2} \ . \ 40^2 \text{ или } A_x = \frac{A_u}{u^2} \cdot x^2 \quad . \ . \ . \ (6).$$

Возьмем, например, древесный капитал в возрасте 80 лет, равный для сосновых насаждений I бонитета 1.833 руб. Тогда, по приведенной формуле, стоимость насаждения в 40 лет будет равна:

$$A_{40} = \frac{A_{80}}{80^2} \cdot 40^2 = \frac{1833 \,.\, 1600}{6400} = 458 \text{ руб.}$$

Почвенный же капитал будет равен половине, т. е.:

$$B = \frac{A_{40}}{2} = 485 : 2 = 229 \text{ руб.}$$

Как видим, формулы Глазера дают, сравнительно, простой способ определения, как древесного капитала, в любом возрасте, так и „стоимости лесной почвы“ (B).

Считая, в среднем, размер древесного капитала в Бобруйской даче равным 128 руб., а средний возраст, условно, примем в 80 лет, то для 40 лет найдем „стоимость насаждения“ в 32 руб., что будет соответствовать почвенному капиталу $(A_{40}:2) = 16$ руб,

Стало-быть, почвенный капитал (B) изменяется в зависимости от древесного капитала, его абсолютной величины, составляя, в обоих примерах, около 12%, против принятых нами выше 15%, вследствие чего „почвенный капитал“ получился несколько преувеличенным (19,2 вместо 16), а именно: на 3,2 руб.

Мы полагаем, что интенсивность хозяйства не должна измеряться суммой древесного и почвенного капитала, как мертвых в экономическом смысле, и оживающих лишь при применении переменного и по той части постоянного капитала (K_m), которая связана с приложением труда.

Выводы:

1. Понятие интенсивности лесного хозяйства, в интересах изучения, должно быть расчленено, в зависимости от концентрации труда и капитала на единице площади, на трудо-и-капитало-интенсивность.

2. Измеряя трудо-интенсивность лесного хозяйства количеством рабочих дней на единицу площади, приходится констатировать трудо-экстенсивный характер нашего хозяйства (arbeitsextensiv).

3. Переходя к принятому ранее делению капиталов на основной и оборотный, необходимо признать его малую удовлетворительность для лесного хозяйства и существующие разногласия (Пресслер, Шваппах, Орлов).

4. Деление капитала на постоянный и переменный дает большую ясность и должно быть введено в лесоэкономику, взамен прежней классификации.

5. В состав постоянного капитала в лесном хозяйстве входит и основная и оборотная часть, которые неодинако реагируют на интенсивность хозяйства.

6. Определяя соотношение между капиталами, следует брать только наиболее активные части постоянного капитала, относя их к переменному капиталу.

7. Формулы Глазера весьма удобны для целей практики, а потому могли-бы найти у нас применение при решении лесохозяйственных вопросов.

Проф. В. И. Переход.

Май 1926 г.

Zur Frage über die Erforschung der Forstwirtschaftsintensität.

(Versuch einer Quantitätsanalyse).

Zusammenfassung.

1. Der Begriff von der Forstwirtschaftsintensität muss im Interesse der Erforschung, in Abhängigkeit von der Arbeits und=Kapitalskonzentration auf die Flächeneinheit in Arbeits und=Kapitalsintensität geteilt werden.

2. Wenn mir die Arbeitsintensität in der Forstwirtschaft durch die Menge der Arbeitstage auf die Flächeneinheit vermessen, so müssen wir den arbeitsextensiven Charakter unserer Wirtschaft feststellen.

3. Wenn wir auf die früher angenommene Teilung der Kapitalien in Grund und Betriebskapital übergehen, so ist es unumgänglich, ihre geringe Genügeleistung für die Forstwirtschaft, sowie auch die bestehenden Meinungsverschidenheiten (Pressler, Schwappach, Orloff).

4. Die Teilung des Kapitals in ein permanentes und ein veränderliches führt zu einer grösseren Verständlichkeit und muss in die Forstökonomik anstatt der früheren Klassifikation eingeführt werden.

5. Das permanente Kapital in der Forstwirtschaft besteht sowohl aus dem Grund, als auch aus dem Betriebsteile, die auf die Wirtschaftsintensitat ungleich reagieren.

6. Wenn wir die wechselseitigen Beziehungen zwischen den Kapitalien bestimmen, so müssen wir nur die tätigeren Teile des permanenten Kapitals in Betracht ziehen, indem wir sie auf das veränderliche Kapital beziehen.

7. Glaser's Formeln sind für praktische Zwecke sehr bequem und könnten daher für die Lösung forstwirtschaftlichen Fragen bei uns Anwendung finden.

Prof. W. Perechod.

Лесаводныя фітафэнамэтрычныя нагляданьні ў Горацкім дэндралёгічным гадавальніку (у 1924 г.)

1.

Фэналёгічныя нагляданьні вядуцца батанікамі, заалёгамі, мэтэаралёгамі, аграномамі, лесаводамі, памалёгамі, сэлекцыянэрамі і г. д. Ува ўсіх гэтых выпадках розьняцца ня толькі групы аб'ектаў, над якімі адбываюцца нагляданьні, але ў шмат чым розьняцца і тыя мэты, якія перасьлядуюцца гэткімі нагляданьнямі, а часта і тыя мэтады, якімі пры гэтым карыстаюцца. А таму зразумела, што і праграмы нагляданьняў па кожнаму з азначаных выпадкаў будуць розныя.

Фэналёгія, утвораная Кэтле і Фрытшэм доўгі час лічылася як частка мэтэаралёгіі, а фэналёгічныя назіраньні амаль што да канца першага дзесяцігодзьдзя XX-га сталецьця мелі, гэтак кажучы „агульна-фэналёгічны“ характар, мяшаны па дабору аб'ектаў нагляданьня, неспэцыялізаваны па сваіх праграмах і мэтодыцы нагляданьня. Нават у нашы дні можна яшчэ спаткаць выпадкі, калі асобнымі натурадасьледчыкамі і некаторымі аб'яднаньнямі навуковых працаўнікоў прапануюцца такія праграмы феналёгічных нагляданьняў, дзе ёсьць і „апошні марозні дзень“, і „першая навальніца“, і „першыя сьпевы зябліка“, і зацьвітаньне кураслепу, вольхі, ліпы, марошкі“ і „зьяўленьне ўсходаў жыта“, і „пачатак касавіцы“. Гэткімі былі праграмы „Расійскага Геаграфічнага Таварыства“, гэткія праграмы апошнім часам прапанаваны „Фэналёгічным Аддзезам Бюро Навуковых Нагляданьняў Таварыства Аматараў Сьветазнаўства ў Ленінградзе“ і „Біалягічнай Станцыяй імя Ціміразева ў Сакольніках“ каля Масквы.

Цяпер гэткія „агульна-фэналёгічныя“ праграмы і нагляданьні, зробленыя паводле гэтых праграм, нікога з нас не задавальняюць ні зна вуковага ні з практычнага боку. Кожная прыкладная навуковая дысцыпліна апрацоўвае цяпер самастойна сваю праграму фэналёгічных нагляданьняў і свае спэцыяльныя мэтады гэтых нагляданьняў. Свае спэцыяльныя праграмы і мэтады фэналёгічных нагляданьняў ужо маюць такія прыкладныя навукі, як аграномія, лесаводзтва, садоўніцтва, сэлекцыя, прыкладная батаніка, прыкладная заалёгія і некаторыя іншыя. Фэналёгія адшчапілася ад мэтэаралёгіі, дыфэрэнцыравалася і сваімі належнымі часткамі далучылася да тых навуковых дысцыплін, якія адчуваюць у ёй патрэбу. Фэналёгічныя нагляданьні вядуцца абавязкова разам з мэтэаралёгічнымі.

2.

Леса—фэналёгічныя нагладаньні па іх зьместу можна падзяліць на 3 групы: 1) **фітафэналёгічныя**, 2) **заа-фэналёгічныя**, і 2) **фэналёгічныя нагляданьні лесагаспадарчага і лесапрамысловага характару**.

Першыя складаюцца з рэестраваньня часу надыходу пэўных фаз разьвіцця і жыцьця галоўным чынам дрэўных і кустовых расьлін*). Дру-

---

*) і ў меншай меры іншых расьлінных відаў.

гія (энтама-фэналёгічныя, арніта-фэналёгічныя, мамаліа-фэналсгічныя і да т. п.) рэеструюць галоўныя зьявішчы ў жыцьці жывёлін, нясяляючых лес. З гэтай групы нагляданьняў асаблівае значэньне для лясной гаспадаркі маюць нагляданьні над цыклямі разьвіцьця шкодных для лесу шасьціножак. Трэцяя група абыймае сабою шэраг пэрыядычных зьяў лесагаспадарчага парадку: працяжнасьць пэрыяду з аб'еджанаю зімоваю саннаю дарогаю, найлепшы пэрыяд лесараспрацовак, час пачатку сплаву, час пачатку і магчымая працяжнасьць лесакультурнае працы, працы па сяўбе і пасадцы ў гадавальніку і г. д. і г. д., сюды-ж трэба аднесьці і запісы, напр., аб пэрыядзе, калі цяжка знайсьці работнікаў для працы ў лесе з прычыны пачатку ў сялан касьбы, жніва і г. д.

3.

Нагляданьні першай з паказаных вышэй груп (леса-фітафэнялёгічныя) могуць быць патройнага роду: **1) нагляданьні над дрэвамі і хмызьнякамі, 2) нагляданьні над некаторымі відамі травяністай расьліннасьці, якая адыгрывае грунтоўную ролю ў жывым глебавым насьціле над лесам і 3) нагляданьні над фазамі разьвіцьця грыбоў, якія зьяўляюцца прычынаю хваробы дрэў.** Нагляданьні першага роду найбольш частыя ў лесаводнай практыцы, найбольш распрацованы нашаю дасьледчаю лясною справаю і маюць найбольшае значэньне пры вывучэньні прыроды лесу і лесаўтвараючых дрэўных парод. Іх можна назваць „**лесаводна-фіта-фэналёгічнымі нагляданьнямі**“. Нагляданьні трэцяга роду можна назваць „міка-фэналгёічнымі“.

4.

Лесаводна-фітафэналягічныя нагляданьні па характару аб'ектаў, па сваіх заданьнях, а значыцца і па праграмах, па мэтаду нагляданьняў, мэтаду апрацоўкі здабытага фэналёгічнага матар'ялу і па тых умовах, якія павінны захоўвацца пры выбарцы канкрэтных экзэмпляраў для нагляданьня—можна разьбіць на наступныя 5 відаў:

1) **нагляданьні над асобнымі экзэмплярамі дрэў і хмызнякоў;**
2) **нагляданьні над дрэвастанамі;**
3) **нагляданьні ў лясным гадавальніку па пасадачным матар'ялам, які вырошчваецца;**
4) **нагляданьні пашыранай спэцыялізацыі** (напрыклад над ураджайнасьцю насеньня, ападам насеньня, адраўленьнем парастка і г. д.);
5) **Фіта-фэна-мэтрычныя нагляданьні***) (нагляданьні што стаяць у сувязь з пэрыядычнымі зьменамі тых ці іншых частак жывой расьліны).

5.

Першыя 4 віды лесаводна-фітафэналёгічных нагляданьняў знаходзяцца ў вокамернай рэестрацыі часу надыходу фаз разьвіцьця дрэўных расьлін. (Выключэньне складаюць толькі некаторыя нагляданьні 4-га віду, напр., нагляданьні над ападам насеньня, пры якіх ужо каля 20 год адбываюцца ў нас і колькасны падлік). Гэтыя віды нагляданьняў даюць надта каштоўны матар'ял для лесаводнай практыкі. Яны дазваляюць таксама рабіць некаторыя параўнаньні паміж фаз разьвіцьця расьлін і некалькімі мэтэаралёгічнымі элемэнтамі (сумамі тэмпэратур, максімальнымі тэмпэратурамі, познымі веснавымі і раньнімі восеннымі замаразкамі). Але гэтыя параўнаньні не даюць нам магчымасьці глыбока пранікнуць у разуменьне

---

*) Тэрмін „фіта-фэна-мэтрычныя“ нагляданьні мною ўводзіцца ў пяршыню ў фэналягічную літаратуру, дзеля таго што ён дакладна і ясна адбівае сутнасьць гэтага новага віду нагляданьняў.

аконаў росту расьлін і іх разьвіцьця. Справа ў тым, што разьвіцьцё асьліны, інтэнсыўнасьць розных яго фізыялёгічных працэсаў абумаўляцца ня толькі цэлым шэрагам знадворных фактараў (уласьцівасьці глебы, арактар рэльефу, вільготнасьць глеба-грунту, вільготнасьць павэтра, тэмэратура павэтра, колькасьць сьвятла і г. д.), але і ўзамаўплывам, як з шымі расьлінамі, таксама і з тымі ўнутранымі фактарамі ці ўласьцівасьямі, якія належаць да самое расьліны.

Фіта-фэна-мэтрычныя нагляданьні ў мэтэаралягічных адносінах адозьніваюцца ад нагляданьняў першых 4-х відаў тым, што пры іх мы не бмяжоўваемся вокамернай рэестрацыяй часу надыходу пэўных фаз разьіцьця расьлін, а робім штодзенна ці пэрыядычна вымярэньні растучага арастка, ліста, плоду, г. з. бяром пад увагу ня толькі якасны бок разьіцьця і росту расьліны, але й колькасны. Параўнаньне гэтага фэналягічага матар'ялу з надворнымі фактарамі (мэтэаралягічнымі элемэнтамі, у ершую чаргу) дае магчымасьць ужо больш глыбей пранікнуць у зразуеньне законаў росту і разьвіцьця расьліны, якая нас цікавіць, дапамагае явіць заканамернасьць у суадносінах паміж некаторых унутраных і неаторых знадворных фактараў росту. Каштоўнасьць фіта-фэнамэтрычных агляданьняў вызначаецца ў тым, што мы пашыраем і пасоўваем тую рацу па вывучэньню фізыялёгіі росту, якую зрабіла ў лябараторнай абтаноўцы фізыялёгія расьлін, але пашыраем і пасоўваем хоць і з грубымі іструмэнтамі, але ў натуральнай прыроднай абстаноўцы.

Першыя ў нас лесаводныя работы фіта-фэнамэтрычнага характару рабіў праф. А. П. Тольскі над хвояй у 1908, 1909, 1910 і 1911 г.г. калі н быў лясьнічым Баравога Дасьледчага лясьніцтва ў Самарскай губ. мераўся 2 разы ў дзень, 1 раз у дзень і штотыдня верхавінны паратак)*. Праф. Д. І. Марохін такога-ж роду нагляданьні рабіў у 1916 г. б. Сымбірскай губ. і ў 1923 г. паблізу г. Горы-Горкі (мераліся праз ожных 5 дзён у хвоі звычайнай верхавінны парастак, даўжыня ігліцы, елічыня новай і прашлагодняй шышкі, у елкі звычайнай, мадрыны сыбіркай і ельніцы бальзамічнай—даўжыня парастка, ігліцы і велічыня шышкі, ліпы дробналісьцёвай, вярбы-брэдніку і вольхі белай-даўжыня парастка велічыня ліста**).

6.

Надаючы вялікае значэньне мэтаду фіта-фэнамэтрычных нагляданьняў у справе вывучэньня біалягічных і лесаводных уласьцівасьцяў відаў рэўнай расьліннасьці, я з 1923 году парупіўся ўтварэньнем абстаноўкі ля гэтага роду нагляданьняў у закладзеным тады Горацкім дасьледчым эндралягічным гадавальніку. Каб мець надзейны і годны для параўнаньія матар'ял фіта-фэнамэтрычных нагляданьняў патрэбна на невялічкай лошчы з аднастайнымі глебава-грунтовымі ўмовамі мець задавальняючую олькасьць растучых экзэмпляраў усіх тых дрэўных і хмызьняковых відаў, кія прызначаны да вывучэньня. Усе дрэвы павінны быць прыблізна днаўзрослымі. Адлегласьці між іх павінны быць роўнымі і адпавядаць рыблізна тым, якія лічацца звычайнымі для данага ўзросту лясной школы, культур, дрэвастанаў. Умовы асьвятленьня і ўмовы рэльефу павінны ыць аднастайны для ўсіх аб'ектаў нагляданьня. Для тутэйшых парод насеньня для гадоўлі аб'ектаў такіх нагляданьняў павінна быць мясцовага пахаджэньня.

---

*) „Труды по Лесному Опытному Делу в России“. Выпуск XLVII. 1913 г. стар. 55-85.

**) „Записки Горецкого Сельско-Хозяйственного Института“. Том I. 1924 г. стар. 134-138 і том II. 1925 г. стар. 62-87.

Такія ўмовы вызначаны былі для утварэньня вышэйпаказанай абстаноўкі на тэрыторыі Горацкага дасьледчага гадавальніку. З прычыны таго, што ўжо вісьветлілася, што вельмі каштоўныя рэзультаты дае ня толькі аналіз фіта-фэнамэтрычнага матар‘ялу кожнага віду дрэў паасобна, але і параўнальнае вывучэньне гэтага матар‘ялу для розных відаў, дык было вырашана пажаданым сабраць на адбітай у гадавальніку плошчы як мага больш відаў нашых дрэў і хмызьнякоў.

Парадак працы вызначан наступны: 1) узгадаваць у бліжэйшыя два гады пасадачны матар‘ял усіх відаў дрэў і хмызьнякоў, якія ўваходзяць ў склад тутэйшых лясоў, з насеньня мясцовага пахаджэньня, а экзатычных відаў, што ўвайшлі ў нашу лесакультурную практыку з насеньня, здабытага па магчымасьці с бліжэйшых лесарасьлінных раёнаў і краін; 2) утварыць, па магчымасьці адвачасна, на адным вучастку невялічкія пляцкі чыстых пасадак кожнага віду; 3) пляцкі гэтых с пачатку будуць мець выгляд лясной школы, далей характар маладых лясных культур; адпаведна гэтаму іх і даглядаць; 4) выпрацаваць дэтальную праграму фіта-фэнамэтрычных нагляданьняў, распрацаваць фармуляры для запісаў нагляданьняў такія, каб яны ў максімальнай ступені эканомілі час пры многалікавых нагляданьнях і памерах, распрацаваць тэхніку памераў з мэтаю здабыць магчыма больш дакладны матар‘ял; 5) на працягу 1924 году арганізаваць фіта-фэнамэтрычныя нагляданьні папярэдняга, накіравальнага характару з мэтаю падрыхтаваць наглядчыка для будучай грунтоўнай працы; 6) да грунтоўных нагляданьняў прыступіць з 1925 ці 1926 году і весьці іх на працягу 10 год бязупынна; у першыя 5 гадоў ня менш аднаго разу на дзень на працягу ўсяго вэгэтацыйнага пэрыяду.

7.

Выкананьне вызначанага парадку працы ў 1923 годзе пасунулася з такім посьпехам, што ўжо ў 1923 годзе ўдалося на тымчасовым пляцку, дзе сабрана было да 20 відаў дрэўнай і хмызьняковай расьліннасьці ў колькасьці ад 10 да 20 экзэмпляраў кожнага, зрабіць фіта-фэнамэтрычныя нагляданьні ня толькі накіравальнага характару, але і дазваляючыя зрабіць некаторыя зусім абгрунтаваныя вывады, хоць іх трэба лічыць усё-ж папярэднімі, дзеля таго што далей чакаецца яшчэ больш багаты матар‘ял.

Часовы пляцок выяўляў сабою школку, засаджаную вясною 1923 г. Пасадачны матар‘ял быў узяты з самасеву т. з. „Старога Парку“ (цяпер дэндралягічнага саду Акадэміі) і часткаю з падросту па рэдкалесьсях Горацкай лясной дачы. Узрост саджанцаў, якія наглядаліся, быў амаль што аднакі: для хваёвых 4—5, для ліставых 3—4 гадовы.

Нагляданьні пачаліся 16 красавіка над 90 экзэмплярамі 15 відаў і рэгулярна паўтараліся праз кожныя 5 дзён аж да 8 кастрычніка, калі ўжо поўнасьцю азначылася, што павялічэньня ў даўжыню ні ў воднага з парасткаў, якія наглядаліся, няма. На вялікі жаль пралезшыя праз разбураны рог цаглянай загарадзі ў гадавальнік гарадзкія козы апошнімі днямі красавіка папсавалі верхавінкі многіх экзэмпляраў, якія наглядаліся. Прышлося гэтыя экзэмпляры замяніць другімі, а агульны лік іх скараціць да 39, колькасьць відаў удалося пакінуць як і раней (15), але распадзел экзэмпляраў па відах быў ужо нераўнамерны. Далей па розных прычынах прышлося адмовіцца яшчэ ад 3-х экзэмпляраў і ў апрацоўку ўвыйшоў матар‘ял нагляданьняў над 36 экзэмплярамі 15 відаў. З прычын чыста надворных прышлося адзін прамежак паміж нагляданьняў замест 5 дзён зрабіць, роўным 7 днём (30/VII і 6/VII), а дзеля таго скараціць і наступны прамежак да 3-х дзён (6/VIII—9/VIII).

Нагляданьні былі ў вымярэньні ў кожнага экзэмпляра даўжыні верхавіннага парастка праз кожныя 5 дзён мілімэтровую лінейкаю. Дакладнасьць памеру была да 1 мм. Вымярэнны рабіліся заўсёды каля 9—10 гадзін раніцы. Заразом запісваліся і іншыя фэналёгічныя зьявы, што наглядаліся ў даных экзэмпляраў. Сачылі за здароўем саджанцаў. Нагляданьні рабіў навуковы супрацоўнік пры маёй катэдры, які скончыў лясны факультэт **Д. О. Манцэвіч** (цяпер вучоны лесавод), якому лічу сваім абавязкам выразіць глыбокую падзяку за выключна дакладную працу па нагляданьнях, нягледзячы на тое, што ён быў церазмеру нагружаны шмат якімі іншымі абавязкамі пры катэдры і складанымі нагляданьнямі па іншых дасьледчых працах.

Рэзультаты памераў парасткаў і апрацоўкі здабытага матар'ялу зьмешчаны ў 4 табліцы.

У табліцы № 1 паказана даўжыня парасткаў у мілімэтрах, якою яна была пры памерах праз кожныя 5 дзён у 36 нагляданых экзэмпляраў. У табліцы № 2 паказаны прыросты даўжыні парасткаў у мілімэтрах за кожныя 5 дзён у тых самых 36 экзэмпляраў. Табліца № 3 выяўляе з сябе падвядзеньне сярэдняй даўжыні парасткаў у мілімэтрах для кожнага з 15 нагляданых відаў за кожныя 5 дзён. У табліцы № 4 падведзены сярэднія прыросты даўжыні парасткаў для кожнага віду за кожныя 5 дзён вэгэтацыйнага пэрыяду.

8.

Як бачым з даданых табліц, для фіта-фэнамэтрычных нагляданьняў былі ўзяты наступныя віды дрэў і хмызьнякоў:

1. Pinus silvestris, L.—Хвоя звычайная . . . . (2 экз.).
2. Picea excelsa, Lk.—Елка „ . . . . (4 „).
3. Abies sibirica, Ledb.—Ельніца сыбірская . . . . (3 „).
4. Quercus pedunculata, Ehrh—Дуб даўгалісты (черешчатый) (2 „).
5. Ulmuc effusa, Willd—Вяз . . . . (3 „).
6. Ulmus montana, With—Лём . . . . (1 „).
7. Acer platanoides, L.—Клён востралісьцёвы . . . . (7 „).
8. Acer tataricum, L.—Клён татарскі . . . . (1 „).
9. Acer pseudoplatanus, L.—Клён—Явар . . . . (3 „).
10. Tilia cordata, Mill.—Ліпа дробналісьцёвая . . . . (2 „).
11. Betula verrucosa, Ehrh.— Бяроза гузаватая . . . . . . (1 „).
12. Salix fragilis, L. Вярба крохкая . . . . (4 „).
13. Rhamnus cathartica, L.—Крушына звычайная . . . . . . (1 „).
14. Viburnum Lantana, L.—Чорная каліна . . . . (1 „).
15. Daphne Mezereum, L.—Воўчыя ягады . . . . (1 „).

Фіта-фэнамэтрычныя нагляданьні 1924 году ў Горацкім дасьледчым дэндралёгічным гадавальніку для 4—5 гадовых ігластых і 3—4 гадовых ліставых далі наступныя рэзультаты:

Хвоя звычайная разьвівала свой верхавінны парастак у даўжыню ад 1/V да 19/VI. Пэрыяд росту ўкладаецца ў 50 дзён. Пасьля 19/VI даўжыня парастку была нязьменнаю. Сярэдняя даўжыня парастка 12,8 см. Найбольш інтэсыўны рост наглядаўся ад 6 да 30 траўня, г. з. спачатку вэгэтацыі. Абсалютны максімальны прырост за 5 дзён прыпаў на 26—30 траўня і выразіўся велічынёю ў 5 см, г. з. 1 см. у суткі. Сярэдні максімальны прырост для абедзьвюх нагляданых хвой прыпадае на тыя-ж 5 дзён і роўны 3,5 см. Поўны перапынак у росьце ў абодвых экзэмплярах наглядаўся ад 31 траўня да 10 чэрвеня.

Елка звычайная даўжыню сваю верхавіннага пабегу разьвівала ад 6 траўня да 24 чэрвеня. Такім чынам рост парастку ў елкі пачынаецца каля аднаго тыдню пазьней, чым у хвоі і спыняецца таксама пазьней каля аднаго тыдню. Пэрыяд росту, таксама як і ў хвоі, ровен 50 днём. Сярэдняя даўжыня ў даным узросьце раўнялася 9,5 см., г. з. крыху менш, чым у хвоі. Найбольш інтэнсыўны рост наглядаўся ад 21 траўня да 19 чэрвеня, г. з., па-паршае, ён пачаўся і скончыўся тыдняў на 2—3 пазьней, чым у хвоі, па-другое, ён крыху даўжэй, чым у хвоі. Абсалютны максімальны прырост за 5 дзён прыпаў на 10—14 чэрвеня і быў роўны 4,3 см., г. з. 0,86 см. за суткі. Сярэдні максімальны прырост (для 4 елачак) прыпадае на тыя-ж 5 дзён—10—14 чэрвеня і ровен 2,4 см. за 5 дзён ці 0,8 см. за суткі. Параўнаньне пяцідзеўных прыростаў елкі і хвоі між сабою паказвае, што найбольшы сутачны прырост у хвоі бывае ў сярэдзіне пэрыяду роста верхавіннага парастку, а ў елкі бліжэй к канцу гэтага пэрыяду (глядзі табліцу № 4). Перапынку ў росьце у елкі ня было, але адна з елачак (№ 6) трымала сябе вельмі самабытна: скончыла рост свайго парастку пазьней другіх, каля 24 чэрвеня, вядома, з закладкаю новага пучка; ад 25 чэрвеня да 24 жніўня даўжыня парастку не зьмянялася; пасьля 24 жніўня з новага пучка вельмі шпарка пачаў вырастаць новы парастак, рост якога цягнуўся да 22 верасьня. Даўжыня гэтага другога парастка раўнялася 11,5 см.

Пэрыяд росту верхавіннага парастку у **ельніцы сыбірскай** цягнуўся ад 6 траўня да 4 ліпеня. г. з. ён равен 60 днём. Сярэдняя даўжыня гадавога парастку роўна 8,9 см. Пэрыяд найбольш інтэнсыўнага росту прыпаў, як і ў ёлкі, на 21 траўня—19 чэрвеня. Абсалютны максімальны прырост наглядаўся паміж 31 траўня і 4 чэрвеня і за 5 дзён равен 2,1 см., г. з. 0,4 см. за суткі. Сярэдні максімальны прырост прыпаў на 10—14 чэрвеня, таксама, як і ў елкі. Наогул ход росту парастку ў ельніцы вельмі падобны да ходу росту ў елкі (глядзі табл. № 1 і № 4). Перапынку ў росьце таксама ня было.

У дуба даўгалістага (черешчатого) пэрыяд росту цягнуўся ад 6 траўня да 4 ліпеня і роўны 60 днём. Сярэдняя даўжыня гадавога парастка была роўна 30,4 см. Найбольш інтэнсыўны рост наглядаўся ад 6 да 30 траўня і ад 15 да 29 чэрвеня. Ад 31 траўня да 14 чэрвеня наглядаўся поўны перапынак росту, вядомы для дубу яшчэ здаўна. Абсалютны максімальны прырост за 5 дзён наглядаўся ў дуба 20—24 чэрвеня і быў роўны 14,2 см., г. з. 2,8 см. за суткі. Сярэдні максімальны прырост прыпаў на тэй-самы час—20—24 чэрвеня. Максімальныя сутачныя прыросты парастка ў дуба наглядаліся ў канцы пэрыяду роста.

У вяза пэрыяд росту быў ад 6 траўня да 22 верасьня, г. з. ён роўны 140 днём, у $2^{1}/_{3}$ разы больш, чым у дуба і амаль у тры разы даўжэй, чым у хвоі і елкі. Сярэдняя даўжыня верхавіннага парастку 110,3 см. Пэрыяд найбольш інтэнсыўнага росту: ад 6 траўня да 13 жніўня. Абсалютны максімальны прырост прыпаў ад 30 ліпеая да 5 жніўня і роўны 16,6 см. за 7 дзён ці 2,4 см. ў суткі. Сярэдні (з нагляданьняў над 3 вязамі) максімальны прырост прыпаў на тыя-ж дні і роўны 10,0 см. за 7 сутак ці 1,4 см. ў суткі. Перапынку ў росьце ня было.

У лёма пэрыяд росту і характар росту парастку так і самы як і ў вяза. Працяжнасьць пэрыяду росту таксама роўна 140 днём, таксама пачынаецца 6 траўня і канчаецца 22 верасьня. Даўжыня вырасшага за лета парастку роўна 221,3 см. Абсалютны максімальны прырост прыпаў таксама на час ад 30 ліпеня да 5 жніўня. Велічыня-ж яго роўна за 7 дзён 26,5 см. ці 3,8 см. ў суткі. Перапінку ў росьце ня было.

Клён востралісьцёвы меў пэрыяд росту ў 150 дзён, ад 26 красавіка да 22 верасьня. Сярэдняя даўжыня гадавога парастку роўна 158,6 см.; найбольшая—233,5 см., а найменшая з наглядных (7 экзэмпляраў)—41,0 см. Працяжнасьць інтэнсыўнага росту значная: ад 6 траўня да 18 жніўня. Абсалютны максімальны прырост прыпаў на 5 дзён ад 14 да 18 жніўня і ровен 25,6 см., г. з. 5,1 см. ў суткі. Сярэдні максімальны прырост для 7 наглядных экзэмпляраў прыпаў на працягу 4 пяцідней: 15—19 чэрвеня, 20—24 чэрвеня, 30 ліпеня—5 жніўня і 6—8 жніўня і роўны 2 см. за суткі. Клён востралісьцёвы, як і наступны клён-явар, паказвае два пэрыяды з максімальным сутачным прыростам і ў другой палове чэрвеня і ў першай палове жніўня. З прычыны таго, што сутачны прырост у яго ў гэты час у сярэднім ровен 2 см., а у некаторых экземпляраў даходзіць да 5 см., востралісьцёвы клён ува ўзросьце ад 2-х да 4-х гадоў можна раіць, як добры аб'ект для вывучэньня нарастаньня даўжыні парастку ў залежнасьці ад гадзіны сутак. У сярэдзіне чэрвеня і ў першай палове жніўня пры дапамозе самых простых мерных прылад (мілімэтровая лінейка) можна на парастку маладога клёну востралісьцёвага прыкмеціць зьмены велічыні прыросту нават праз кожную гадзіну Перапынку ў росьце парастку клёна востралісьцёвага ня было.

У клёна-явара пэрыяд росту верхавіннага парастку быў ад 1 траўня да 22 верасьня і роўны 145 днём. Сярэдняя даўжыня парастку роўна 91,2 см.; найбольшая—111,7 см; найменшая—73,5 см. Пэрыяд найбольш інтэнсыўнага росту цягнуўся ад 16 траўня да 18 жніўня. Абсалютны максімальны прырост быў ад 26 да 30 траўня і роўны 12,9 см. за 5 сутак ці 2,6 см. за 1 суткі. Сярэдні максімальны прырост наглядаўся 26—30 траўня і роўны 12,07 см. за 5 сутак ці 2,5 см. за 1 суткі. Другі максімальны (сярэдні) прырост быў між 30 ліпеня і 5 жніўня. Перапынку ў росьце не наглядалася.

Пэрыяд росту парастка ў **клёна татарскага** роўны 145 днём. Пачаўся ён 1-га траўня і скончыўся 22-га верасьня Даўжыня парастка ў нагляданага экзэмпляру 84,0 см. Пэрыяд інтэнсыўнага росту: ал 26 траўня да 18 жніўня. Максімальны прырост прыпаў на 15—19 ліпеня, а ўласьне кажучы 9 см., г. з. 1,8 см. ў сярэднім за суткі. Перапынку ў росьце ня было.

Ліпа дробналісьцёвая мела пэрыяд росту ў 65 дзён, ад 6 траўня да 4 ліпеня. Даўжыня гадавога парастка 35 см. Час інтэнсыўнага росту ад 26 траўня да 29 чэрвеня. Максімальны прырост быў 26—30 траўня і і роўны 7,7 см. У сярэднім за суткі 1,5 см. Перапынку ў росьце парастку за час пяцідзеняў ня было.

Бяроза гузаватая пачала рост свайго верхавіннага парастку 1 траўня і скончыла 18 жніўня. Пэрыяд росту 100 дзён. Даўжыня гадавога парастку—88,1 см. Інтэнсыўны рост можна лічыць ад 21 траўня да 18 жніўня. Максімальны прырост у 9,3 см. прыпаў на сяміднеўе 30 ліпеня—5 жніўня і быў роўны ў сярэднім 1,3 см. за суткі. Перапынку ў росьце не наглядалася.

У вярбы крохкай парастак рос ад 1 траўня да 18 жніўня. Пэрыяд росту—100 дзён. Сярэдняя даўжыня парастку—133,0 см. Найбольшая з нагляданых—142,0 см., найменшая—124,0 см. Пэрыяд інтэнсыўнага росту з 21 траўня да 13 жніўня. Абсалютны максімальны прырост быў за пяціднеўе 20—24 чэрвеня і ровен 18,0 см. (дрэўца № 33), г. з. 3,6 см. ў сярэднім за суткі. Сярэдні максімальны прырост прыпадае на 26—30 траўня і роўны 12,6 см. г. з. 2,5 см. ў сярэднім за суткі. Перапынку ў росьце не наглядалася.

Парастак **крушыны звычайнай** пачаў свой рост 6 траўня і скончыў 27 верасьня. Пэрыяд росту можна лічыць роўным 145 днём. Даўжыня гадавога парастку 97 см. Пэрыяд інтэнсыўнага росту можна лічыць ад 16 траўня да 10 чэрвеня і, другі, ад 19 жніўня да 22 вьрасьня. Максімум прыросту дяло пяцідневе 26—30 траўня, на працягу якога парастак прыбавіўся на 13,8 см., г. з. ў сярэднім на 2,8 см. за суткі. Поўны перапынак у росьце наглядаўся за пяцідневе 30 чэрвеня—4 ліпеня, а ад 20 ліпеня да 20 жніўня наглядаўся зацішак у росьце.

Парастак **каліны чорнай** меў самы большы пэрыяд росту—165 дзён, ад 16 красавіка да 27 верасьня. Даўжыня атрыманага гадавога парастку роўна 38,1 см. Найбольш інтэнсыўны рост наглядаўся ад 6 траўня да 20 чэрвеня, поўнасьцю вызначаны ў першай палове вэгэтацыйнага пэрыяду. Пасьля 20 чэрвеня быў зацішак у росьце з некаторым уздымам у канцы ліпеня і ў пачатку жніўня з поўным перапынкам у пяцідневе 19—24 жніўня. Максімальны прырост у 7,5 см. дало пяцідневе 26—30 траўня, што ў сярэднім дае 1,5 см. за суткі.

Парастак **воўчых ягад** даў найменшы пэрыяд росту: 40 дзён, ад 1 траўня да 9 чэрвеня. Даўжыня гадавога парастку раўнялася 2 см. Найбольш інтэнсыўны рост можна лічыць ад 16 да 30 траўня. Максімальны прырост прыпаў на 26—30 траўня. Максімальны прырост за суткі быў каля 0,1 см.

9.

Так званы „вялікі пэрыяд росту“ запраўды існуе і ў парасткаў дрэўнай расьліннасьці. Прыросту даўжыню перш малы, потым павялічваецца і максімум яго наглядаецца то бліжэй, то далей ад сярэдзіны пэрыяду росту; у канцы-ж пэрыяду звычайна наглядаецца стуханьне росту. Але „вялікая крывая росту“ Сакса ні ў аднаго з 36 нагляданых экзэмпляраў, ні ў аднаго з 15 відаў ня выходзіць такою плыннаю, якою яна звычайна падаецца ў падручніках фізыялёгіі расьлін для фасолі і падобных ей расьлін, якія гадуюцца ў пакоі пры штучнай абстаноўцы. У натуральных умовах усе нашы 36 экзэмпляраў 15 відаў дрэўнай расьліннасьці паказалі, што павялічэньне даўжыні верхавіннага парастку ідзе скачкамі. Прырост то павялічваецца, то памяншаецца. Можна лічыць, што плынная крывая вялікага пэрыяду росту ёсьць зьявішча самаўраднага парадку, што абумаўляецца ўнутранымі ўласьцівасьцямі арганізму. Парушэньне-ж плыннасьці гэтай крывай, нарастаньне парастку скачкамі, ёсьць зьявішча індуцыраванага парадку, якое выклікаецца ўплывам знадворных фактараў і ў першую чаргу элемэнтаў пагоды. Але залежнасьць велічыні прыросту ад мэтэаралягічных элемэнтаў, як відаць, вельмі складаная. На простую роўналежнасьць прыросту з якім небудзь адным элемэнтам, здаецца, нельга спадзявацца. Можна толькі шукаць элемэнту, які грае пераважную ролю ў данай фізыка-геаграфічнай абстаноўцы. Праца Cieslar'a, Hesselmann'a і прафэсара Тольскага дае нам у гэтым кірунку ўжо некаторыя ўказаньні. Больш падрабязна залежнасьць паміж росту дрэў і фактарамі знадворнага асяродку, мне здаецца, і можна высьветліць шляхам фітафэнамэтрычных нагляданьняў, калі іх рабіць на працягу шэрагу гадоў над аднымі і тымі-ж дрэвамі, калі памеры рабіць не праз 5 дзён, а штодзенна на працягу ўсяго вэгэтацыйнага пэрыяду і калі матар'ял гэткіх нагляданьняў апрацоўваць адначасна з апрацоўкаю належных мэтэаралёгічных нагляданьняў.

Што да поўнага перапынку ў росьце парастку ў дуба, дык гэтае зьявішча, бязумоўна, самаўраднага парадку абумаўляецца ўнутранымі ўласьцівасьцямі данага віду. Тое-ж трэба сказаць і аб нагляданым перапынку ў хвоі. Як відаць, перапынак росту парастку ў хвоі быў у выніку ўзмацнёнага разьвіцьця ў гэты час маладой ігліцы.

10.

Матар'ял фіта-фэнамэтрычных нагляданьняў дае нам шмат каштоўнага для пазнаньня біалёгіі нашых дрэўных відаў. (Трэба думаць, што гэтага роду нагляданьні дадуць істотную карысьць і для вывучэньня адмен і рас дрэўных парод, што ў сучасным лесаводзтве зьяўляецца чарговаю задачаю).

Табліцы № 3 і № 4 ясна паказваюць на велічыню пэрыяду росту верхавіннага парастку ў кожнага з 15 відаў. Велічыня гэта надта вялікая ў лёмавых, кляноў, крушыны, каліны чорнай, меншая ў бярозы і вярбы і значна меншая ў нагляданых ігластых, а з ліставых у ліпы. Досьледы праф. Д. І. Марохіна[1]) паказалі, што дрэвы разьвіваюць свае часткі ў пэўнай пасьлядоўнасьці. У хвоі перш расьце парастак, а потым ігліца. У ліпы перш лісьцё і парастак, а потым яна цьвіце і канцэнтруе свае сілы на росьце пладоў і іншых функцыях. Вельмі цікавым зьяўляецца той факт, што наша 3-х гадовая ліпа, якая яшчэ не павінна-б клапаціцца аб своечасовым зацьвітаньні і пладанашэньні, таксама значна збавіла рост свайго парастку перад тым, як дарослыя ліпы, што расьлі неўдалёк, пачалі цьвісьці, і зусім скончыла яго, як толькі ў дарослых ліп пачалося поўнае цьвіценьне..

Прамежкі паміж нагляданьняў	31—4 / V—VI	5—9 / VI	9—14 / VI	15—19 / VI	20—24 / VI	25—29 / VI	30—4 / VI—VII	5—9 / VII	10—14 / VII	15—19 / VII	20—24 / VII	і гэтак далей
Прырост даўжыні верхавіннага парастка	42мм.	2мм.	43мм.	62мм.	42мм.	32мм.	9мм.	0	0	0	0	0

У дзеньніку фэналёгічных нагляданьняў над дарослымі дрэвамі ў мяне адзначана, што ў тым-жа 1924 г. пачатак цьвіценьня ў ліпы запісана 1/VII, а поўнае цьвіценьня надышло 5/VII.

Як відаць, працяжнасьць пэрыяду росту данай часткі расьліны ёсьць унутраная ўласьцівасьць арганізацыі кожнага віду і перадаецца ў спадчыну з роду ў род.

Сказанае аб велічыні пэрыяду росту можна паўтарыць, як відаць з табліц, і аб усіх іншых элемэнтах росту парастка. **Кожнаму віду ўласьцівы свой час для інтэнсыўнага росту, свой час для максімальнага сутачнага прыросту, свой час для пачатку і сканчэньню росту данае часткі расьліны, а для данага ўзросту і свая сярэдняя даўжыня гадавога верхавіннага парастку.**

Па кожнаму з паказаных элемэнтаў росту пры задавальняючай колькасьці фіта-фэнамэтрычных нагляданьняў мы маглі-б усе нашы віды дрэў і хмызьнякоў разьмеркаваць у пэўны спадаючы шэраг, накшталт скалы ценятрываласьці ці шыбкасьці росту, зыскоўнасьці к пладароднасьці глебы і г. д.

Зьвядзеньне характарыстыкі рост і спадаючы шэраг па велічыні пэрыяду росту верхавіннага парастку для нагляданых 15 відаў падаецца ў наступнай табліцы.

---

[1]) „Записки Горецкого С.-Х. Института", том II, 1925 г. стар. 87.

	НАЗВА	Працяжнасц пэрыяду рос верхавіннага перастка	Колькасць дз у пэрыядзе ро верхав. парас	Пэрыяд інт сыўнага ро парастка	Сярэдняя д жыня верха парастка ў с	Макс. з нагл даўжыня вер парастка	Мінім. даўжь верхавіннаг парастка	за 5 дзён		за 5 дзён	
								Час	Даўжыня ў см.	Час	Даўжыня ў см.
1	Viburnum Lantana, L. Каліна чорная.	$\frac{16}{\text{IV}} - \frac{27}{\text{IX}}$	165	$\frac{6}{\text{V}} - \frac{20}{\text{VI}}$	38.1	—	—	$\frac{26-30}{\text{V}}$	7,5	—	—
2	Acer platanoides, L. Клён востралісьцёвы.	$\frac{26}{\text{IV}} - \frac{22}{\text{IX}}$	150	$\frac{6}{\text{V}} - \frac{18}{\text{VIII}}$	158,6	233,5	41,0	$\frac{14-18}{\text{VIII}}$	25,6	$\frac{15-19}{\text{VI}}$, $\frac{20-24}{\text{VI}}$, $\frac{30}{\text{VII}} - \frac{5}{\text{VIII}}$, $\frac{6-8}{\text{VIII}}$	10,0 10,5 14,0 9,0
3	Acer pseudoplatanus, L. Клён—Явар.	$\frac{1}{\text{V}} - \frac{22}{\text{IX}}$	145	$\frac{16}{\text{V}} - \frac{18}{\text{VIII}}$	91,2	111,7	73,5	$\frac{26-30}{\text{V}}$	12,9	$\frac{26-30}{\text{V}}$ $\frac{30}{\text{VII}} - \frac{3}{\text{VIII}}$	12,1 7,8
4	Acer tataricum, L. Клён татарскі.	$\frac{1}{\text{V}} - \frac{22}{\text{IX}}$	145	$\frac{26}{\text{V}} - \frac{18}{\text{VIII}}$	84,0	—	—	$\frac{15-19}{\text{VII}}$	9,0	—	—
5	Rhamnus catharttca, L. Крушына звычайная.	$\frac{6}{\text{V}} - \frac{27}{\text{IX}}$	145	$\frac{16}{\text{V}} - \frac{10}{\text{VII}}$; $\frac{19}{\text{VIII}} - \frac{22}{\text{IX}}$	97,0	—	—	$\frac{26-30}{\text{V}}$	13,8	—	—
6	Ulmus effusa, Willd. Вяз.	$\frac{6}{\text{V}} - \frac{22}{\text{IX}}$	140	$\frac{6}{\text{V}} - \frac{13}{\text{VIII}}$	110.3	140,1	80,4	$\frac{30}{\text{VII}} - \frac{5}{\text{VIII}}$	16,6	$\frac{30}{\text{VII}} - \frac{5}{\text{VIII}}$	10,0
7	Ulmus montana, With. Лём.	$\frac{6}{\text{V}} - \frac{22}{\text{IX}}$	140	$\frac{6}{\text{V}} - \frac{18}{\text{VIII}}$	221.3	—	—	$\frac{30}{\text{VII}} - \frac{5}{\text{VIII}}$	26,5	—	—
8	Betula verrucosa, Ehrh. Бяроза гузаватая.	$\frac{1}{\text{V}} - \frac{18}{\text{VIII}}$	100	$\frac{21}{\text{V}} - \frac{18}{\text{VIII}}$	88,1	—	—	$\frac{30}{\text{VII}} - \frac{5}{\text{VIII}}$	9,3	—	—
9	Salix frangilis, L. Вярба крохкая.	$\frac{1}{\text{V}} - \frac{18}{\text{VIII}}$	100	$\frac{21}{\text{V}} - \frac{13}{\text{VIII}}$	133,0	142,0	124,0	$\frac{20-24}{\text{VI}}$	18,0	$\frac{26-30}{\text{V}}$	12,6
10	Tilia cordata, Mill. Ліпа дробналісьцёвая.	$\frac{1}{\text{V}} - \frac{4}{\text{VII}}$	65	$\frac{26}{\text{V}} - \frac{29}{\text{VI}}$	35,0	—	—	$\frac{26-30}{\text{V}}$	7,7	—	—
11	Quercus pedunculata, Ehrh. Дуб доўгалісты	$\frac{6}{\text{V}} - \frac{4}{\text{VII}}$	60	$\frac{6-30}{\text{V}}$ и $\frac{15-29}{\text{VI}}$	30,4	43,2	17,5	$\frac{20-24}{\text{VI}}$	14,2	$\frac{20-24}{\text{VI}}$	8,0
12	Abies sibirica. Ledeb. Ельніца сыбірская.	$\frac{6}{\text{V}} - \frac{4}{\text{VII}}$	60	$\frac{21}{\text{V}} - \frac{19}{\text{VI}}$	8,9	9,5	8,3	$\frac{31}{\text{V}} - \frac{4}{\text{VI}}$	2,1	$\frac{10-14}{\text{VI}}$	1,6
13	Pinus silvestris, L. Хвоя звычайная.	$\frac{1}{\text{V}} - \frac{19}{\text{VI}}$	50	$\frac{6}{\text{V}} - \frac{30}{\text{V}}$	12,8	16,0	9,5	$\frac{26-30}{\text{V}}$	5,0	$\frac{26-30}{\text{V}}$	3,5
14	Picea excesa, Lk. Елка звычайная	$\frac{6}{\text{V}} - \frac{24}{\text{VI}}$	50	$\frac{21}{\text{V}} - \frac{19}{\text{VI}}$	9,5	18.0	3,5	$\frac{10-14}{\text{VI}}$	4,3	$\frac{10-14}{\text{VI}}$	2,4
15	Daphne Mezereum, L. Воўчыя ягады	$\frac{1}{\text{V}} - \frac{9}{\text{VI}}$	40	$\frac{16}{\text{V}} - \frac{30}{\text{V}}$	2,0	—	—	$\frac{26-30}{\text{V}}$	0,4	—	—

Падобнага роду для ўсіх нашых відаў і адмен табліца вельмі цікава і для лесаводнай практыкі. Нашы даныя паказваюць, напрыклад, наколькі мы гвалтуем прыроду хвоі звычайнай, калі вельмі спазьняемся вясною яе саджаць.

Чым больш мы зацягваем пасадку, тым больш у супроць натуральныя ўмовы ставім нашу хвою звычайную, дзеля таго што к канцу траўня пры нашых умовах яна ўжо амаль канчае рост свайго парастку (канец інтэнсыўнага пэрыяду росту).

Агульнавядома лесаводнае правіла, што елку вясною можна саджаць значна пазьней, чым хвою. Графа 2 і 4 толькі што паданай табліцы моваю лічбаў тлумачаць нам прычыну гэтага. Хоць у лесаводнай практыцы даўно было вядома, што елка ідзе ў рост крыху пазьней хвоі, але цяпер мы яшчэ ведаем і ведаем дакладна, што елка ня толькі на тыдзень пазьней ідзе ў рост, але і пэрыяд інтэнсыўнага росту галоўнага парастку ў яе адсунуты значна далей, чым у хвоі: ён пачынаецца на цэлых два тыдні і канчаецца на 3 тыдні пазьней, чым у хвоі.

11.

Пры разглядзе матар'ялу ніжэйпаказаных 4-х табліц самі сабою набіваюцца яшчэ некаторыя законамернасьці ў разьвіцьці верхавіннага парастку.

Разглядаючы табліцы № 1 і № 2 лёгка ўбачыць, што ўсе асобы аднаго і таго-ж віду разьвіваюць свой верхавінны парастак зусім аднакава. Прыблізна ў адзін час пачынаецца рост, а канчаецца ён амаль што ўва ўсіх выпадках аднначасова. Адначасова пачынаецца і канчаецца поўны перапынак у росьце (у дуба і ў хвоі). Адначасова пачынаецца і канчаецца інтэнсыўны пэрыяд росту, адначасова бывае максімальны прырост пабегу.

Законамернасьць гэтая ідзе і далей. З табліц № 3 і № 4, а таксама і з табліцы, зьмешчанай на старонцы 172, відаць, што рост парастку ў розных відаў аднаго і таго-ж роду таксама мае шмат агульнага, падлягаючы як-бы аднаму пэўнаму закону (вяз і лём; клён востралісьцёвы, клён-явар і клён татарскі).

Гэнэтычна блізкія роды, як бяроза і вярба, елка і ельніца, таксама схожа разьвіваюць свой парастак. А таму можна лічыць, што фіта-фэнамэтрычныя нагляданьні можна скарыстаць у пэўных межах і ў пэўных выпадках для вызначэньня гэнэтычнай сувязі паміж мала вывучаных відаў дрэўнай расьліннасьці краю.

12.

Падводзячы кароткі падрахунак агляду фіта-фэнамэтрычнага матар'ялу, здабытага ў 1924 годзе, можна зрабіць наступныя вывады:

1) Рост верхавіннага парастка дрэў у натуральнай абстаноўцы падлягае закону „вялікага пэрыяду росту“, але крывая Сакса выходзіць няплынная, няправільная. Нарастаньне даўжыні верхавіннага парастка ідзе скачкамі.

Правільнасьць крывой вялікага пэрыяду росту трэба лічыць як зьявішча самаўраднага парадку, што абумаўляецца ўнутранымі ўласьцівасьцямі арганізму. Нарушэньне-ж плыннасьці гэтай крывой, нарастаньне парастка скачкамі, ёсьць зьявішча індуцыраванага парадку, што выклікаецца ўплывам знадворных фактараў росту і ў першую чаргу фактараў мэтэаралягічных.

2) Кожны від дрэўнай расьліннасьці для верхавіннага парастку мае сваю пэўную і пільна ўсімі асобамі данага віду захаваную працяжнасьць

росту, свой уласны пэрыяд інтэнсыўнага росту, свой пэўны час максімальнага сутачнага прыросту, свой час для пачатку і скначэньня росту кожнай сваёй часткі, а для данага ўзросту і сярэднюю даўжыню верхавіннага парастка.

3) Пасьля намнажэньня ў задавальняючай колькасьці матар‘ялу фітафэнамэтрычных нагляданьняў, зробленых на адным месцы над значным лікам відаў, можна будзе ўсе нашы дрэвы і хмызьнякі разьмеркаваць па пэўных спадаючых шэрагах адносна ўсіх элемэнтаў росту (працяжнасьць пэрыяду росту, працяжнасьць і час інтэнсыўнага росту, максімальнага сутачнага прыросту і г. д.), падобна да таго, як складаюцца скалы ценятрываласьці дрэўных парод, шыбкасьці росту, зыскоўнасьці к пладароднасьці глебы і інш.

15 дасьледжаных у 1924 годзе відаў па працяжнасьці пэрыяду росту ў даўжыню верхавіннага парастка разьмяшчаюцца ў наступны шэраг:

№№	Працяжнасьць росту ў даўжыню верхавіннага парастку ў днёх	Час пачатку і канца пэрыяду росту ў даўжыню верхавіннага парастку	Віды дрэў і хмызьнякоў
1	165	$\frac{16}{\text{IV}} - \frac{27}{\text{IX}}$	Viburnum Lantana, L.
2	150	$\frac{26}{\text{IV}} - \frac{22}{\text{IX}}$	Acer platanoides, L.
3	145	$\frac{1}{\text{V}} - \frac{22}{\text{IX}}$	Acer psendoplatanus, L.
4		$\frac{1}{\text{V}} - \frac{22}{\text{IX}}$	Acer tataricum, L.
5		$\frac{6}{\text{V}} - \frac{27}{\text{IX}}$	Rhamnus cathartica, L.
6	140	$\frac{6}{\text{V}} - \frac{22}{\text{IX}}$	Ulmus effusa, Willd.
7		$\frac{6}{\text{V}} - \frac{22}{\text{IX}}$	Ulmus montana, With.
8	100	$\frac{1}{\text{V}} - \frac{18}{\text{VIII}}$	Betula verrucosa, Ehrh.
9		$\frac{1}{\text{V}} - \frac{18}{\text{VIII}}$	Salix fragilis, L,
10	65	$\frac{1}{\text{V}} - \frac{4}{\text{VII}}$	Tilia cordata, Mill.
11	60	$\frac{6}{\text{V}} - \frac{4}{\text{VII}}$	Quercus pedunculata, Ehrh.
12		$\frac{6}{\text{V}} - \frac{4}{\text{VII}}$	Abies sibirica, Ledb.
13	50	$\frac{1}{\text{V}} - \frac{19}{\text{VI}}$	Pinus silvestris, L.
14		$\frac{6}{\text{V}} - \frac{24}{\text{VI}}$	Picea excelsa, Lk.
15	40	$\frac{1}{\text{V}} - \frac{9}{\text{VI}}$	Daphne Mezereum, L.

4) У характары росту верхавіннага парастка праяўляюцца агульныя законамерныя рысы для розных відаў аднаго і таго-ж роду і нават для розных родаў, гэнэтычна адзін к аднаму блізкіх.

5) Лесаводныя фіта-фэнамэтрычныя нагляданьні зьяўляюцца па сутнасьці камбінацыяй біамэтрычнага і фэналёгічнага мэтадаў дасьледваньня.

Такога роду нагляданьні канечна патрэбны пры некаторых фэналёгічных і фізыалёгічных досьледах, напрыклад, пры азначэньні часу сканчэньня росту парастка, пры дасьледваньні ходу роста парастка па даўжыні, а ствала дрэва па таўшчыні ў залежнасьці ад часткі году ці часткі вэгэтацыйнага пэрыяду. Але яшчэ больш каштоўным мэтад фіта-фэнамэтрычных нагляданьняў будзе ў справе пашыранага вывучэньня біалёгіі дрэўных відаў, што канечна патрэбна, як для пашырэньня сучаснага стану вучэньня аб лесе, таксама і для практычнага лесаводзтва.

6) У залежнасьці ад характару заданьняў дасьледчай працы лесаводныя фіта-фэнамэтрычныя нагляданьні трэба рабіць ці праз кожныя 10 дзён, ці праз 5, ці штодзенна, ці па некалькі разоў у суткі.

II—1926 г. *Прафэсар С. П. Мельнік.*

Дадатак табліцы: № 1, № 2, № 3, № 4.

Forstliche phytophönometrische Beobachtungen im Gorkischen dendrologischen Pflanzgarten.

Zusammenfassung.

Die von Quetelet und Fritsche begründete Phänologie galt lange Zeit für einen Teil der Meteorologie. Es wurden Beobachtungen mit völliger Nichtachtung des Charakters der Versuchsobjekte und ohne Berücksichtigung streng spezialisirter Programme angestellt. Heutzutage befriedigen solche allgemein-phänologische Beobachtungen Niemanden mehr, Landwirte Forstwirte, Pflanzenzüchter, Pomologen u. s. w. arbeiten ihre eigenen Programme und Methoden für etwaige phänologische Beobachtungen aus.

Forstlich-phänologische Beobachtungen lassen sich in 3 Gruppen einteilen: 1) phytophänologische, 2) Zoo-phänologische und 3) phänologische Beobachtung forstwirtschaftlichen und forstbetrieblichen Charakters.

Die Beobachtungen der ersten Gruppe können von dreierlei Art sein: 1) Beobachtungen an Bäumen und Sträuchern (forstbaulich-phänologische), 2) an den krautartigen Gewächsen im Walde und 3) an Pilzen, die im Walde und auf den Bäumenwachsen (Mykophänologische Beobachtungen).

Die waldbaulich-phänologischen Beobachtungen kann mann in Asabetracht des Charakters ihrer Objekte, ihres Endzweckes, ihres Programms und ihrer Methodik in Folgende 5 Arten einteilen:

1) Beobachtungen an Einzelexemplaren von Bäumen und Sträuchern,

2) Beobachtungen an Beständen,

3) Beobachtungen im forstlichen Pflanzgarten an Sämlingen und Setzlingen.

4) Beobachtungen in die Tiefe gehen der Spezialisirung (z. B. specielle Beobachtungen über der Fruchtertrag der Bestände, über die Zeit des Abwerfens der Früchte, über die Zeit des Verholzens der Triebe, Anlage neuer Knospen u. dgl.)

5. Phytophänometrische Beobachtungen.

Das Wesen der *phyto-phänometrische Beobachtungen* bestehet darin, dass periodisch das eine oder das andere Organ einer Pflanze (der Gipfeltrieb, Blatt, Frucht, Stammdurchmesser u dgl.) gemessen wird.

Im Gorki'schen dendrologischen Versuchsgarten der Weissrussischen Staatlichen Landwirtschaftlichen Akademie wurde vom Jahre 1923 an mit der Anlage von kleinen Flächen zu Baumschulzwecken begonnen, in welchen eine möglichst grosse Zahl von Arten unserer Bäume und Sträucher verpflanzt werden in der Absicht an den jungen Pflänzehen gleichen Alters *phyto-phänometrische Beobachtungen* anzustellen.

Im Jahre 1924 wurden zum ersten Mal der artige Beobachtungen an 36 Exemplaren verschiedener Baum—und Straucharten angestellt.

Vom 16 April bis zum 8 Oktober wurde nach je 5 Tagen die Länge der Gipfeltriebe gemessen.

Das erzielte Beobachtungsmaterial ist von hahem forstwirtschaftlichen Werte, da es uns die Müglichkeit giebt in die Biologie unserer Bäume und Sträucher einzudringen.

Im Allgemeinen kann man die Ergebnisse in folgenden Sätzen zusammenfassen.

1) Der Wuchs der Gipfeltriebe bei Bäumen unter natürlichen Verhältnissen in der Tat dem Gesetze „grosser Wachstumsperioden“ unterworfen, die Sachs’sche Kurve verläuft jedoch nicht gleichmässig stetig, sondern unregelmässig. Das Längenwachstum der Gipfeltriebe geht sprungweise vor sich.

Der regelmässige Verlauf der Kurve grosser Wachstumsperioden ist als eine Erscheinung autonomen Charakters, der von den inneren Eigenschaften der organismen beeinflusst wird, aufzufassen. Eine Störung im regelmässigen Verlauf der Kurve, ein sprung weises Anwachsen des Triebes, dass sind Erscheinungen inducirenden Charakters, hervorgerufen durch äussere Wachstumsfaktoren, in erster Reihe durch meteorologische Faktoren.

2) Jede Art eines baumartigen Gewächses hat seine bestimmte, von allen Einzelwesen derselben Art streng eingehaltene Wachstumsdauer, seine eigene Periode intensiven Wachstums, seine bestimmte Zeit des maximalen täglichen Zuwachses, seine eigene Zeit für Anfang und Abschluss des Wachstums eines jeden Organs und für sein jeweiliges Alter auch seine Durchschnittslänge am Gipfeltriebe.

3) Nach Anhäufung einer genügenden Anzahl von Materialien phytophänometrischer Beobachtungen, welche an ein und demselben Orte an einer grossen Anzahl von Arten anzustellen wären, ware die Möglichkeit gegeben, unsere Bäume und Sträucher in bestimmte Reihen absteigender Ordnung in Beziehung auf alle Elemente ihres Wachstums (Andauer der Wachstumsperiode, Dauer und Zeit intensiven Wuchses, Maximum des täglichen Zuwachses u. dgl) einzuordnen, etwa in der Art, wie die Skalen für schattenliebende Baumarten, Schnelligkeit des Wuchses, Ansprüche an die Fruchtbarkeit des Bodens u. s. w, aufgestellt werden.

Die 15 im Jahre 1924 auf die Dauer der Wachstumsperiode ihres Gipfeltriebes hin untersuchten Arten ordnen sich in folgenden Reihen an:

№№	Dauer des Längenwachstums der Gopfeltriebe in Tagen	Anfangs—u. Endzeit der Periode des Längewachstums des Gipfeltriebe	Arten der Bäume und Sträucher
1	165	16/IV — 27/IX	Viburnum Lantana, L.
2	150	26/IV — 22/IX	Acer platanoides, L.
3	145	1/V — 22/IX	Acer psendoplatanus, L.
4		1/V — 22/IX	Acer tataricum, L.
5		6/V — 27/IX	Rhamnus cathartica, L.
6	140	6/V — 22/XI	Ulmus effusa, Willd.
7		6/V — 22/IX	Ulmus montana, With.
8	100	1/V — 18/VIII	Betula verrucosa, Ehrh.
9		1/V — 18/VIII	Salix fragilis, L,
10	65	1/V — 4/VII	Tilia cordata, Mill.
11	60	6/V — 4/VII	Quercus pedunculata, Ehrh.
12		6/V — 4/VII	Abies sibirica, Ledb.
13	50	1/V — 19/VI	Pinus silvestris, L.
14		6/V — 24/VI	Picea excelsa, Lk.
15	40	1/V — 9/VI	Daphne Mezereum, L.

4. Im Charakter des Wuchses der Gipfeltriebe lassen sich allgemeine gesetzmässige Züge für die einzelnen Abarten ein und derselben Gattung und sogar für die einzelnen Gattungen, die genetisch einander nahe stehen, erkennen.

5. Forstliche phyto-phänometrische Beobachtungen bestehen im Grunde genommen aus einer Kombination von biometrischen und phänologischen Versuchsmethoden.

Beobachtungen dieser Art sind bei manchen phänologischen und physiologischen Untersuchungen, z. B. bei einer Bestimmung der Zeit des Anfanges des Wachstums der Triebe, bei der Erforschung des Längenzuwachses des Triebes, beim Stamme eines Baumes jedoch für das Dickewachstum in Abhängigkeit von der Jahreszeit, oder in Teilen der Vegetationsperiode, unbedingt geboten. Viel wert voller jedoch erweist sich die Methode phyto-phänometrischer Beobachtungen jedoch auf dem Gebiete der ein gehen deren Erforschung der Biologie der Baumarten, was unbedingt netwending erscheint sowohl für Erweiterung des gegenwärtigen Staudes der Lehre vom Walde als auch für die Praxis der Forstwirtschaft.

6. In Abhängigkeit vom Charakter der Aufgaben der Forschungsarbeiten müssen forstliche phyto-phänometrische Beobachtungen entweder alle 10 Tage,oder alle 5 Tage, oder aber alltäglich, ja sogar mehrere Mal om Tage vorgenommen werden.

S. M.

Уплыў акругленьняў пры памерах вышынь і дыямэтраў на дакладнасьць вылічэньня аб‘ёмаў дрэў.

Для высьвятленьня першай часткі гэтага пытаньня зроблена параўнаньне аб‘ёмаў, якія атрымліваюцца паводле масавых табліц з градацыяй вышынь праз аршын (узяты расійскія, апрацованыя праф. Арловым табліцы 29 А ў даведніку яго-ж укладаньня) з табліцая па банітэтах, якая мае больш грубую градацыю па вышынях — праз 3 — 4 арш. Для прыкладу ўзята хвоя ў 8 вяршкоў на вышыні грудзей. Табліца № 1.

Графа 5 дае лічбы акругленьняў, ці хібнасьцяй, што ў даным выпадку ўсё роўна, вышынь дрэў пры карыстаньні табліцамі банітэтаў. Графа 6 дае адпаведную памылку ў аб‘ёмах, паказаную ў графе 7 у %% ад аб‘ёмаў у графе 2. У графе 8-й паказаны %% хібнасьцяй, здабытых па формуле $\rho = 100 \frac{h}{H,}$ а ў графе 9 разыходжаньне лічбаў па графах 7-ай і 8-ай.

З табліцы выразна відаць, што банітэты I, II, III і IV ахопліваюць кожны размах вышынь у 4 аршыны (II б.—3 арш.); I-а і IV, як крайнія, прымушаны абслугоўваць вельмі нізкарослы лес (для якога трэба, каб была градацыя V-а) і вельмі высокарослы лес (трэба мець для яго 1-в). Акругленьні в + 1 арш, што найбольш часта сустракаюцца ў практыцы, даюць памылкі ад 4,1% да 1,5%; больш для нізкарослага лесу V—в. і менш для высокарослага (I-а). Сярэдняя памылка без падліку знакаў ± з 12 лічбаў для ўсіх 6 банітэтаў роўна 2,5%. Калі прыняць пад увагу знакі, дык сярэдняе з тых жа лічбаў будзе + 0,1%. Адпаведныя лічбы і рэзультаты па формуле $\rho = 100 \frac{h}{H}$ (графа 8) гэткія: ад 4% да 2,2%; сярэднія 2,9% і з падлікам знакаў + 0,1%.

Акругленьні да двох аршын даюць памылкі ад 8,9% да 3,1%. Сярэдняя памылка без падліку знакаў роўна 5%, а з падлікам іх + 0,5%.

Адпаведныя лічбы паводле формулы гэткія: 8,3 — 4,3%; сярэднія 5,76% і + 0,4%, хоць тут лепш лічыць апошнюю лічбу за 0,0%, калі ня ўводзіць у падлік крайнія лічбы + 8,3 для V і — 4,3 для I-а.

Абагульняючы вывад для 1 і 2 арш. акругленьняў і прымаючы пад увагу што для дрэвастанаў заўсёды мае месца кампэнсацыя вышынь, для табліц банітэтаў, якія маюць інтэрвал у вышынях у 4 арш., г. з. за максімальным акругленьнем у 2 арш., гэтыя акругленьні зусім не адчуваюцца на аб‘ёмах.

Спрошчаная формула $\rho = 100 \frac{h}{H}$ дае задавальняючыя рэзультаты, а іменна: 22 лічбы графы 9 у сярэднім без падліку знакаў даюць 0,5%. З выпадкі даюць 1,2 — 1,3%; значныя лічбы разыходжаньняў наглядаюцца для высокарослага лесу ў 48—55 арш., а іменна 2,6%.

Грубыя акругленьні вышынь, звыш 2 арш., значна падвышаюць %

хібнасьці, прычым акругленьні мацней адбіваюцца на нізкарослым лесе, напр., акругленьне да 4-х арш. (26 замест 22) для V банітэтаў дае хібнасьць у + 18,1%, а для I-а (45 замест 49) дае — 5,4%.

У другой частцы гэтай табліцы паказаны данныя з расійскіх часовых масавых табліц, якія вельмі яскрава падкрэсьліваюць іх поўную нявязку ні з банітыровачнымі адносінамі, ні з агульным размахам вышынь паводле падрабязных табліц. З прычыны толькі адных аграмадных зьніжэньняў вышынь для найбольш высокарослага, а значыцца, і каштоўнага лесу, дзякуючы акругленьню да вышыні I разраду атрымоўваюцца хібнасьці для III б.—7%, II—13,6%, I—20,7% і I-а—25,7%, а для самага высокарослага лесу I-в б звыш 30%. Апроч таго „часовыя“ даюць меншыя аб‘ёмы, раўнуючы з іншымі, нават пры аднакавых вышынях, так, напрыклад, для 32,5 арш. па „часовых“ аб‘ём 34,9 к. ф. у той час, як па табліцах Арлова 36,2 к. б., г. з.—2,7 к. ф. ці — 7,4%

Акругленьне ў дыямэтрах больш адбіваецца на аб‘ёмах, чым акругленьне вышынь. Для асьвятленьня гэтага пытаньня падаюцца лічбы з удзельнага выданьня масавых табліц для хвоі па табл. I, тыпу I, групы 1, узросту 95 — 120 гадоў, паўднёвай і сухадольнай, вышынёю 42 арш. Табліца № 2.

Разглядаючы табліцу бачым, што %% хібнасьцяй ад акругленьня ў дыямэтры да 1 вяршка вельмі высокія, асабліва для тонкага лесу (+ 21,2%), паступова памяншаючыся для тоўстага лесу (+ 8,2% для $11^{1}/_{2}$ в.).

Спрошчаная формула $p = 200 \frac{d}{D}$ дае добрыя результаты, якія мала адрозьніваюцца ад графы 6. Пры агульнай таксацыі дрэвастану, дзе можна чакаць кампэнсацый у дыямэтрах, можна абмяжоўвацца грубымі ступенямі ў 1 вяршок, асабліва для тоўстага лесу. Пры дыфэрэнцыраванай таксацыі дрэвастану, з падлікам катэгорый лесу буйнага, сярэдняга і дробнага, а асабліва пры ўвядзеньні значнай колькасьці гатункаў, хоць бы напрыклад тых VI, што паказаны Арловым у сваіх „Очерках лесоустройства“, грубыя акругленьні да 1-го вяршка не павінны быць, затым што тады ня можна пазбавіцца вялікіх хібнасьцяй у разьмеркаваньні запасу на гатункі.

Ф. Турыцын.

25—III—26 г.

Вышыня ў арш.	Аб'ёмы па табліцах		Клясы банітэтаў	Акругленьні па вышыням	Памылка ў аб'ёме	% хібнасьцяй			Расійскія часовыя					
	Расійскіх Арлова 29 А	Банітэтаў 25 А				У адносінах памылкі да аб'ёму	Па формуле $\rho = 100\frac{h}{H}$		Вышыня ў аршынах	Разрад таблц	Кубатура па табліцах	Акругленьне па вышыне	Памылка ў аб'ёме	%% хібнясьцяй у адносінах памылкі да абёму
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	3	14	15
19	22			+7ар.	+8 к.ф.	+36,3%	+36,8%	+0,5%	22	IIIр.	24,7			
20	23,2			+6	+6,8	+29,3	+30	+0,7						
21	24,8			+5	+5,2	+21	+23,8	+2,8						
22	25,4			+4	+4,6	+18,1	+18,1	+0,0						
23	26,5			+3	+3,5	+13,2	+13	−0,2						
24	27,6			+2	+2,4	+ 8,9	+ 8,3	−0,6						
25	28,8			+1	+1,2	+ 4,1	+ 4%	−0,1						
26	30	30	V	0,0	0,0	0,0	0,0	0.0				+ 1.5ар.	0,0	0,0
27	31			−1	−1к.ф.	− 3,2	− 3,7	+0,5	27,5	IIр.	30			
						− 6,6	− 7,1	+0,5						
28	32			+2	+2	+ 6,2	+ 7,1	+0,9						
29	33			+1	+1	+ 3	+ 3,4%	+0,4						
30	34	34	IV	0,0	0,0	0,0	0.0	0,0				+ 2,5ар.	+ 0,9	+ 2,6%
31	34,9			−1	−0,9	− 2,9	− 3,2	+0,3	32,5	Iр.	34,9			
						− 5,3	− 6,2	+0,9						
32	35.7			+2	+1,8	+ 5	+ 6,2	+1,2						
33	36,7			+1	+0,8	+ 2,2	3%	+0,8%						
34	37,5	37,5	III	0,0	0.0	0,0	0.0	0.0				− 1,5ар.	− 2,6ф.	+ 7%
35	38,5			−1	−1	−2,6	− 2,8	+0.2						
36	39.5			+1	+0,9	+2.5	+ 2,8	+0,3						
37	40.4	40,4	II	0.0	0.0	0,0	0,0	0,0				− 4,5ар;	− 5,5ф.	−13,6%
38	41,3			−1	−0.9к.ф	− 2,2	− 2,6	+0,4						
						− 4,4	− 5,1	+0,7						
39	42,2			+2	+1,8	+ 4,3	+ 5,1	+0,8						
40	43			+1	+1	+ 2,3	+ 2,5	+0,2						
41	44	44	I	0.0	0,0	0,0	0,0	0,0				− 8,5ар.	− 9,1ф.	+20,7
42	44,8			−1	−0,8	− 1.8	− 2,4	+0,6						
43	45,5			+2	+1,5	+ 3,3	4,6	+1,3						
44	46,3			+1	+0,7	+ 1,5	+ 2,3	+0,8						
45	47,0	47,0	I-а	0,0	0,0	0,0	0.0	0.0				−12,5ар.	− 12,1	−25,7%
46	47,8			− 1ар.	−0,8	− 1,7	− 2,2	+0,5						
47	48,5			−2	−1,5	− 3,1	− 4,3	+1,2						
48	49,1			−3	−2,1	− 4,2	− 6,2	+2						
49	49,7			−4	−2,7	− 5,4	− 8,2	+3,2						
50	50,4			− 5	−3.4	− 6,7	− 10	+3,3				−17,5	−15.5	−30,5%
51	51.1			− 6	−4,1	− 8	−11,8	+3,8						
52	51,8			− 7	−4,8	− 9,2	−13.4	+4,2						
53	52,5			− 8	−5,5	−10.4	−15,1	+4,7						
54	53,0			− 9	−6,0	−11,3	+16,7	+5,4						
55	53,5			−10	−6,5	−12,1	+18,1	+6.0						

Табл. 1 Крудэнэра, хвоя I тыпу, 1 групы, 95—120 г., паўдн. сухад., H = 42 арш.

Дыямэтр у вяршках	Аб'ём у футах	Памылкі ад акругленьня		Памылка сярэдняя	% % памылак	% % памылак па формуле 200 $\frac{d}{D}$	Ухіленьне ў % %
		+	—	±			
1	2	3	4	5	6	7	8
4	12,6						
$4^1/_2$	15,8	+3,5	−3,2	±3,35	±21,2	±22,2	+1%
5	19,3						
$5^1/_2$	23,1	+4,1	−3,8	±3,95	±17,3	±18,1	+1%
6	27,2						
$6^1/_2$	31,5	+4,7	−4,3	±4,5	±14,3	±15,4	+1,1%
7	36,2						
$7^1/_2$	41,1	+5,3	−4,9	±5,1	±12,4	±13,3	+0,9
8	46,4						
$8^1/_2$	51,9	+5,7	−5,5	±5,6	±10,8	±11,8	+1
9	57,6						
$9^1/_2$	63,6	+6,3	−6,0	±6,15	±9,7	±10,5	+0,8
10	69,9						
$10^1/_2$	76,3	+6,7	−6,4	±6,55	±8,6	±9,5	+0,9
11	83						
$11^1/_2$	90,3	+7,5	−7,3	±7,4	±8,2	±8,7	+0,5
12	97,8						

III.

Намнажэньне мінэральнай матэрыі ў асобных ворганах аўса ў час росту.

(з работ аграхэмічнай лябараторыі).

Распрацоўка гэтай тэмы невялічкі ўклад у досыць ужо багаты матар'ял у галіне дасьледаваньня і вывучэньня пытаньня мінэральнага жыўленьня расьлін. Першыя падыходы да гэтага пытаньня з навуковага боку, трэба аднесьці к канцу XVIII і пачатку XIX стагодзьдзя. Лічучы непатрэбным чапаць падрабязнасьці гісторыі і эвалюцыі пытаньня, я дадам да гэтай працы толькі самы кароткі нарыс першых крокаў у паказаным кірунку.

Яшчэ ў XVIII стагодзьдзі дасьледчыкі, робячы з рознымі мэтамі аналізы расьлін, натыкнуліся на факт сталай прысутнасьці ў расьлінах попелу. Ні пры якіх умовах не ўдавалася спаліць расьлінны прадукт без астачы. Пры больш дакладным дасьледаваньні попелу розных расьлін у ім былі знойдзены элемэнты Ca, P, Fe, K, Si і шмат іншых, прычым з боку колькасьці і якасьці была заўважана вялікая разнастайнасьць. Гэты факт сталай прысутнасьці элементаў попелу ў расьліне зьвярнуў на сябе ўвагу вучонага сьвету і перш асобныя вучоныя, а потым цэлыя навуковыя арганізацыі ставілі на вырашэньне пытаньне: ці ёсьць попел выпадковаю дамешкаю арганічных утварэньняў, ці ён уваходзіць у іх склад, як канечна патрэбная сустаўная частка. Дасьледаваньні Шрадэра [1] (1800 г.) схілілі яго да першага пункту погляду, з чым згадзілася і Бэрлінская Акадэмія, прэміраваўшы яго адказ. Але ў работах таго-ж часу Сэнэб'е [2] і Сасюра [3] (1804 г.) і крыху пазьней Дэві [4] і Шпрэнгэля [5], праўда, без задавальняючых угрунтаваньняў, элементы попелу разглядаюцца ўжо, як пажыўная матэрыя, патрэбная расьліне. Толькі пры другой пастаноўцы пытаньня ў 1838 годзе Гэтынгэнскай Акадэміяй, праз 4 гады Вігман і Пальсторф [6] далі пэўны, абгрунтованы дасьледчымі па мэтаду пясковых культур данымі, адказ, што пры адсутнасьці ў глебе задавальняючай колькасьці растварымых мінэральных соляй разьвіцьцё расьлін затрымліваецца і нават зусім прыгнячаецца. Узьнікшая тады-ж лібіхаўская тэорыя мінэральнага жыўленьня расьлін ужо толькі ў мінэральным складзе глебавага асяродку бачыла яе каштоўнасьць. Крайна-

---

[1] Schrader, 1800. Preisschrift ûber eigentl. Erzeugung der erdigen Bestanedteile in den Getreidearten. Berlin.

[2] Senebier, 1800. Physiologie vègètale. Bd. 3.

[3] Th. Saussure, 1804. Recherches sur la vègètation.

[4] Дэви. 1819. Élements de chimie agricole.

[5] C. Sprengel. 1839. Die Lehre vom Dünger.

[6] Wiegman und Polstorff, 1842. Ueber die anorganische Bestandteile der Pflanze. Braunschweig.

сьці і талентнасьць распрацоўкі гэтай тэорыі ўзьнялі глыбокую зацікаўленасьць да гэтага пытаньня; як супраціўнікі гэтак сама і прыхільнікі яе жвава ўзяліся за дасьледаваньні, тым больш, што цяпер пытаньне аб попеле расьлін, апроч глыбокага тэарэтычнага, здабыў яшчэ і чыста практычны інтарэс, як грунтаваньне тэорыі ўгнаеньняў.

Дзякуючы шматлікавым бязупынным дасьледаваньням мы пашлі далёка ўперад, але, ня гледзячы на вялікія дасягненьні ў гэтай галіне, пытаньне застаецца яшчэ далёка ня вычэрпаным, далёкім ад канчатковага вырашэньня; яшчэ шмат ёсьць нявыразнага, гаданьняў, спрэчных пунктаў, вымагаючых падрабязнай распрацоўкі, праверкі і вывучэньня. Але ўсё-ж, падобна таму, як даўней няўцямнасьць і таемнасьць магутных праяў сілы прыроды прымушала чалавека гадаць аб нейкіх невядомых магутных боствах, а цяпер паступовае высьвятленьне сутнасьці зьяў дало тлумачэньне ўсяму на падставах законаў фізыкі і хэміі і скінула багоў з іх п‘едэсталу, таксама і з боку сьвета расьліннага ўведзенае Арыстотэлем паняцьце „сілы пажыўной“ (Vis vegetativa) і, падобна для сьвету жывёлін, плюс „сілы адчуваючай“ (Vis sensitiva) цяпер усё больш і больш пачынае губляць сваё значэньне і ўжо мала калі даводзіцца клікаць на дапамогу асобную „жыцьцёвую сілу“ для тлумачэньня якіх-небудзь фактаў, а звычайна ўжо ёсьць магчымасьць гаварыць аб кожным працэсе, што адбываецца ў расьліне, як аб прыватным выпадку агульных фізычных і хэмічных законаў. Недалёка той дзень, калі ўсё складанае жыцьцё расьлін будзе выяўлена шэрагам формул, згодных з гэтымі законамі. Тады вывучэньне расьліны можна будзе лічыць скончаным і сказаць: „Так. Доўгі і цяжкі быў шлях, але мы дабіліся мэты— навуковая думка перамагла ўсе перашкоды“.

Тэма гэтай працы прапанована мне загадчыкам катэтры Агранамічнай і Арганічнай Хэміі Горы-Горацкага С.-Г. Інстытуту (цяпер Акадэміі) праф. О. К. Зіхман-Кедравым і выканана пад яго непасрэдным кіраваньнем, за вошта лічу прыемным абавязкам выразіць яму сваю падзяку.

Аб‘ект аналізу.

За матар‘ял дасьледваньня ў гэтай працы паслужыў авёс шацілаўскі-гаспадарчы, насеньня дасьледчай станцыі Іванова, насеены на блізкай да гароднай глебе калякцыйнага гадавальніку катэдры агульнага земляробства інстытуту, на другім кліне 4-х палёвага севазвароту—1 караньплоды на гнаі, 2—авёс, 3—зярнёвыя бабовыя і 4—авёс. Сяўба была зроблена 15-га траўня 1924 году радоваю сявалкаю, маякуючы па пяць пудоў на дзесяціну ў 27 см. паміж радкоў. Авёс узышоў 25-га траўня. Першая проба была ўзята 1-га чэрвеня спачатку кусткаваньня. Наступныя спробы браліся правільна на 10-ы, 20-ы і 30-ы дзень кожнага месяца аж да моманту поўнай сьпеласьці—20-га жніўня (з іх спроба ад 10—VIII была ня зусім прыгоднаю, дзякуючы адсутнасьці даных аб колькасьці расьлін і масе). Знойдзена, што ўраджай даў 390 пудоў з дзесяціны паветрана-сухой расьліннай масы. Спробы падганяліся да паветрана-сухога стану сушэньнем на сонцы і толькі ў пэрыяд асаблівай сакавітасьці зялёнай масы ў сушні. Карэньне бралася да глыбыні каля 25 см., прычым пільна адмываліся ад часьцінак глебы, але, вядомая рэч, абсалютнай велічыні карнявой масы прыходзіцца надаваць толькі прыблізнае адноснае значэньне; дзеля гэтага ўва многіх выпадках укладаньня табліц я браў пад увагу галоўным чынам надземную масу.

Перад аналізам надземная частка спробы аўса дзялілася на асобныя органы—каласкі; ліставыя пласткі і сьцяблы. Ліставыя похвы пакідаліся пры сьцяблох пры дапушчэньні, што яны па сваіх функцыях, а значыцца, і па хэмічнаму складу будуць больш набліжацца да сьцябёл, чым да ліставых пласткоў. Даныя, што адносяцца да гэтай часткі працы з пералічэньнем паветрана-сухой массы на 100 расьлін, сгрупаваны ў наступнай табліцы:

Табліца I.

Час, калі ўзята спроба.	Стадыя разьвіцьця і стан расьліны.	Даўжыня ў см.	Колькасьць расьлін у спробе	Лік сьцябёл	Энэргія кусткаваньня	Сырая маса	% сухой матэрыі.	Паветрана-сухая маса спробы ў грамах					Паветрана-сухая маса 100 расьлін у грамах				
								Агульная	Каласкі	Ліставыя пласткі	Сьцяблы	Карэньні	Агульная	Каласкі	Ліставыя пласткі	Сьцяблы	Карэньні
10/VI	Пачатак кусткаваньня . . .	26	60	—	—	75,5	12,0	8,90	—	5,0	2,85	1,05	14,9	—	8,3	4,8	1,8
20/VI	Моцна раскусьцілася	45	68	182	2,7	299,0	15,0	46,0	—	28,0	12,7	5,3	67,7	—	43,4	16,5	7,8
30/VI	Яшчэ ня выкаласавалася . .	78	50	137	2,7	502,0	17,0	87,9	—	33,5	45,5	8,9	129,3	—	49,3	66,9	13,1
10/VII	Ужо высыпала ў верх. сьцяблох а ў прыдатковых не . .	95	70	123	1,7	863,0	24.0	201,5	13,1	36,7	146,2	14.5	300,7	18,7	52,3	209	20,7
20/VII	Красаваньне ніжнісьцё пачало жоўкнуць	120	35	60	1,7	533,0	25,0	128,7	17,0	22,2	80,0	9.5	367,7	48,6	63,4	228.6	27,1
30/VII	Стадыя наліву.	130	35	54	1,5	490,0	31,0	148,5	29,9	19,1	90,0	9,5	422.1	85,5	54,5	255,0	27,1
20/VIII	Поўная сьпеласьць	130	25	34	1,4	332,0	43,0	135,5	32,6	13,2	79,0	10,7	542,8	130.6	52,8	316,6	42,8

Уся праца, калі браліся расьлінныя спробы і падганяліся да паветрана-сухога стану, была зроблена асыстэнтам пры катэдры агульнага земляробства **А. Ц. Савельевым,** пасьля чаго матар'ял любезна быў перададзены ім катэдры агранамічнай хэміі для аналітычнага дасьледваньня, што было зроблена мною.

Мэтодыка аналізу.

Падрыхтоўка матар'ялу рабілася драбленьнем у мятне „„Excelsior". Звычайна для аналізу бралася наважка ў 5 гр. паветрана-сухой матэрыі. Апопліваньне рабілася на суха у вялікіх парацлянавых тыглях; апэрацыя цягнулася звычайна 3—4 гадзіны. Хістаньні ў роўналежных дасягалі 0,2% на сухую масу. У сэнсэ паўнаты і чыстаты апопліваньня поўнасьцю задавальняючых рэзультатаў удалося дабіцца толькі ў зярнят і карэньняў,ісьцяблі-ж і ліставыя пласткі звычайна давалі попел шэрага ці нават цёмна-шэрага колеру. Гэтым я і абмяжоўваўся, дзеля таго што паліць затрыманы ў попеле вугаль прапяканьнем паводле літаратурных даных не мэтазгодна, па-першае, таму, што гэтая апэрацыя доўгая і цяжкая, і ў тэй-жа час не дае ніякай грунтоўнай пераважнасьці*), па-другое, як мною было канстатавана, пры ёй адбываецца частковае раскладаньне вуглясоляй з прычыны чаго ў роўналежных бываюць значныя разыходжаньні,

---

*) Э. Х. Роллов. 1914. О количественном определении кали и фосфора в растительных материалах.

і па-трэцяе, пры гэтым няўхільны значныя страты фосфарнае кісьлі [1]) з прычыны рэдакцыі яе вуглем, а таксама пераходу ў цяжкарасворны нават у гарачай азотнай кісьлі стан. Зробленыя мною некалькі параўнальных апопліваньняў паказаным сухім спосабам і мокрымі—сумесьсю азотнай і серкавай кісьлі, і аднэю азотнаю кісьляю ў к'ельдальляўскіх колбах з уткнутымі ў рылцы апошніх невялічкімі лейкамі, каб ня выходзіла з параю кісьлі P_2O_5—паказалі, што, як відаць з прыведзеных даных, пры асьцярожным сухім апопліваньні страты фосфарнай кісьлі, чаго звычайна вельмі баяцца, ня бывае (Табл. II). Пасьля выдаленьня крамнёвай кісьлі паўторным выпарваньнем і высушваньнем пры 120°C. фільтрат даганяўся да аб'ему (звычайна ў 100 куб. см.), частка якога трацілася для выяўленьня P_2O_5, а рэшта для азначэньня сумы паўтарачных вокіслаў CaO і MgO.

Табліца II.

P_2O_5 у $^0|_0{}^0|_0$ на сухую масу пры розных спасабох апопліваньня.

Аб'ект аналізу.	Сухое апопліваньне	Гарт з HNO_3	Гарт з HNO_3 + + N_2SO_4
Плады бабоў	1,362 ; —	1,358 ; 1,316	1,358 ; 1,358
Лісьцё бабоў	0,685 ; 0,683	0,681 ; 0,677	0,687 ; 0,681

Выяўленьне P_2O_5 рабілася па Nyssens'у. Мэтад быў вельмі ўдалым, як з боку шыбкасьці выкону, таксама і дакладнасьці рэзультатаў, нават пры дужа малых колькасьцях P_2O_5. За аптымальную колькасьць у абодвых сэнсах мною бралася 15—20 гр. на аналіз.

З прычыны таго, што гэтым мэтадам наша лябараторыя пачала карыстацца і для іншых работ, ужываючы яго пры розных умовах, я прадпрыняў больш падрабязнае вывучэньне умоў гэтага мэтаду, што паказала ўжо пры папярэдніх дасьледваньнях шэраг пераважнасьцяй гэтага мэтаду ў параўнаньні з падвойным асаджваньнем, а іменна стойкасьць яго ў прысутнасьці вельмі значных колькасьцяй серкавай і салянай кісьлі, калі яны перш нэйтралізованы. 50 к. см. малібдату, што звычайна раіцца было намі скарочана з мэтаю эканоміі рэактыву да 25 к. см., але з тым, аднак, разьлікам, каб колькасьць P_2O_5 не перавышала 25 мгр. на аналіз, што відаць з наступных атрыманых мною даных:

Табліца III.

Асаджальнасьць P_2O_5 25 куб. см. малібдату пры розных яе колькасьцях

Узята	19,9 mgr.	24,8 mgr.	29,2 mgr.	34,6 mgr.	37,1 mgr.	44,5 mgr.	49,4 mgr.
Атрымана	19,9 „	24,8 „	27,9 „	34,2 „	36,5 „	39,3 „	37,6 „
Не дааса-джана	—	—	1,3 „	0,4 „	0,6 „	5,2 „	11,8 „

---

[1]) S. Leavith u S. Le Leclere. Jurn. Amer. Chem. Soc. 1908. T. 30 стар. 391—394.

У другой частцы фільтрату перш за ўсе адшуквалася сума паўтарачных вокіслаў—$Fe_2O_3 + Al_2O_3$. Асаджэньне рабілася звычайным ацэтатным спосабам у гарачым стане. Пасьля першага-ж асаджваньня, асад адмываўся ад сьлядоў Ca і прапяканьнем знаходзілася сума $Fe_2O_3 + Al_2O_3 + P_2O_5$. Растварэньня і паўторнага асаджваньня не рабілася, таму што Fe асобна не азначалася, а з іншымі мэтамі апэрацыя гэта мае мала сэнсу. Дзеля таго што колькасьць P_2O_5 ужо была вядома з папярэдняга азначэньня па Nyssen'sy, вылічэньне сумы $Fe_2O_3 + Al_2O_3$ рабілася наступным чынам. У выпадку, калі колькасьць P_2O_5 была менш паловы агульнай сумы $Fe_2O_3 + Al_2O_3 + P_2O_5$, яна проста адымалася, калі-ж была больш паловы, дык для вылічэньня сумы $Fe_2O_3 + Al_2O_3$ браўся каэфіцыэнт 0,5. Гэткі разрахунак, прымаючы пад увагу невялікую колькасьць Al_2O_3 ў параўнаньні з Fe_2O_3, быў-бы ў значнай ступені правільным (усе лічбы ў данай працы атрыманы такім спосабам), каб жалеза і алюміні ў першую чаргу зьвязваліся і асаджваліся ў відзе фасфатаў і толькі лішак іх адносна P_2O_5 асаджваўся-б у відзе асноўнага ацэтату. Але я пазьней, шукаючы прычыны досыць частага разыходжаньня паміж роўналежных, знайшоў, што гэта далёка не заўседы бывае і прытым не заўседы ў аднакавай ступені. Уласьне кажучы як аб тым ёсьць паказаньне ў Трэдвеля[1]), $FePO_4$ часткаю растварыма ў воцатавакіслым і хлёрным жалезе што поўнасьцю сьцьвердзілася і пры зробленых мною досьледах. Гэтая акалічнасьць сваім вынікам мае тое, што, ў выпадку лішку Fe_2O_3 ў параўнаньні з P_2O_5, воцатава-кіслае жалеза, што ствараецца ў растворы, часткаю распускае выпаўшае пры нэйтралізаваньні $FePO_4$, і таму ня ўся P_2O_5 ападае, а частка яе праходзіць у фільтрат. Апошняя акалічнасьць бывае і пры лішку P_2O_5, дзеля таго што, хоць тут усё Fe_2O_3 зьвяжацца з P_2O_5, пры бязумоўнай прысутнасьці ў растворы іонаў Cl' і NO'_3 ствараецца HCl і HNO_3, якія раствараюць нязначныя колькасьці $FePO_4$, у выніку чаго ў растворы зьяўляецца воцатавакіслае і хлёрнае жалеза ад чаго яшчэ больш павялічваецца растварэньне $FePO_4$, тым больш, што выпадзеньне асаду, што бывае пры награваньні, асноўнага воцатавакіслага жалеза, будзе пазбаўляць перашкоды для ходу рэакцыі ў гэтым кірунку. У рэзультаце адбываецца выпадзеньне некаторай колькасьці жалеза ў відзе асноўнага ацэтату, ня гледзячы на прысутнасьць лішку P_2O_5.

З паданых меркаваньняў ясна, што ў абодвых выпадках, г. з. пры лішку і пры недахопу P_2O_5, раўнуючы з Fe_2O_3, у асадзе мы заўсёды будзем мець P_2O_5, колькасьць якой зьмяняецца пры паўторных аналізах нават аднаго і таго-ж раствору ў залежнасьці ад ступені кісьліннасьці, ад тэмпэратуры і ад прамежку часу, па працягу якога робіцца апэрацыя асаджваньня і фільтраваньня, г. з. фактараў, заведама неідэнтычных для асобных аналізаў; адсюль недакладнасьць і няпэўнасьць рэзультатаў.

Выходзячы з гэтых меркаваньняў, хоць шляхам многакратнай паўторнасьці (у некаторых асобных выпадках да 6-ці разоў) мне і ўдалося дабіцца больш—меньш сталых лічбаў, паданыя ў гэтай працы сумы паўтарачных вокіслаў ні ў якай меры ня могуць прэтэндаваць на абсалютнае значэньне, а толькі на адноснае.

У згушчаным, пасьля аддзяленьня паўтарачных вокіслаў, фільтраце рабілася асаджваньне CaO шчаўяаманійнаю сольлю. Стольгане ў сваім падручніку [2]) раіць рабіць асаджваньне ў нэйтральным ці слаба-шчола-

---

[1] F. P. Treadwell. Курс аналитической химии. Рус. перевод А. Комаровского Т. I стр. 302.

[2] Н. Я. Демьянов. Общие приемы анализа растительных веществ. Приложение А. А. Стольчане. 1923 г.

кавым асяродку; але пры першым-жа аналізе мяне занепакоіла выпаданьне асаду фосфарнакіслага кальцыю. І вось, з мэтаю вызначыць, ці не хаваецца тут крыніца хібнасьцяй, я зрабіў некалькі аналізаў касьцянага попелу, з колькасьцю CaO каля 55% і P_2O_5 каля 45%, у якім выпадку хібнасьць павінна была-б выявіцца асабліва выразна. Рэзультаты аналізу роўных колькасьцяй раствору попелу паказаны ў табліцы.

Табл. № IV.

Рэакцыя слаба-шчолакавая			Падкісьлена CH_3 COOH		
CaO ў mgr		MgO ў mgr	CaO ў mgr		MgO ў mgr
Вагасн. м.	Аб'ёмн. м.	Аб'ёмн. м.	Вагасн. м.	Аб'ёмн. м.	Аб'ёмн. м.
32,7	—	0,37	29,4	—	0.56
37,5	—	0,34	29,9	—	0,46
—	25,5	0,43	—	30,0	0,48
—	24,2	0,34	—	29,9	0,48

Адсюль ясна, што пры шчолакавай альбо нэйтральнай рэакцыі частка CaO злучаецца з фосфарнаю кісьляю, чым уплывае на рэзультат зьніжаюча пры аб'ёмным мэтадзе і падвышаюча пры вагасным. На колькасьць MgO, у выпадку наступнага азначэньня, рэакцыя асяродку пры асаджваньні CaO таксама адбіваецца, але ў які бок, г. з. набліжаючы ці аддаляючы ад абсалютнай велічыні, мною ня высьветлялася; паводле-ж літаратурных даных¹) памылка адносна MgO менш пры слабакіслай рэакцыі асяродку, чым пры нэйтральнай ці слабашчолакавай. З сказанага вынікае, што пры аналізах расьлінных прадуктаў, звычайна багатых на фосфарную кісьлю, асаджваньне CaO павінна рабіцца выключна пры слабым падкісьленьні воцатаваю кісьляю.

Магні знаходзіўся аб'ёмным мэтадам. Цытраваньне салянаю кісьляю па мэціл-аранжу, якое звычайна раіцца пасьля прамываньня асаду сьпірытусам і высушваньня яго, пры бязупынным памешваньні да тых пор, покуль зьявіцца слабаружовы колер, апэрацыя надта цяжкая і марудная, дзеля таго што ўсю патрэбную колькасьць цытру прыходзіцца даліваць каплямі, ружовы колер то зьяўляецца то зьнікае, і к канцу нават аднаго цытраваньня, якое займае 10—15 хвілін, вока морыцца настолькі, што гадаць аб канцы цытраваньня бывае вельмі цяжка, асабліва прымаючы пад увагу прысутнасьць разбоўтанага ў жыжцы фільтру. Дзеля гэтага мною было спрабавана адваротнае цытраваньне едкім калі па мэціларанжу. Рэзультаты вышлі самыя лепшыя, як ў сэнсе лёгкасьці, раўнуючы з простым, таксама і дакладнасьці атрыманых даных. Апроч таго, пры зробленых мною параўнаньнях аб'ёмнага мэтаду з вагасным быў выяўлены факт значнага разыходжаньня мэтадаў, а іменна, аб'ёмны даваў яўна падвышаныя рэзультаты. Пры першых-жа спробах высьвятленьня прычыны гэтага ўдалося знайсьці, што ўся сутнасьць тут зьмяшчалася ў шчо-

---

¹) E. Murmann. Zeitschr. f. an. Chem.

лачнасьці фільтраў. Спрабаваныя мною фільтры для свайго ўсерадненьня патрабавалі наступных колькасьцяй $^1/_{10}$ N HCl

Са звычайнай фільтравальнай паперы дыям.	12 см.	1,44 к. см.
„ „ „ „ „	9 „	0,81 „ „
Бяспопельны Schleicher і Schüll № 597, дыям.	9 см.	0,24 к. см.
„ „ „ „ „ „ „	11 „	0,32 „ „
„ I. Green, grade „ 597, „	8 „	0,24 „ „

Папярэдняя апрацоўка фільтраў аманіякам, прамываньне сьпірытусам і высушваньне (паўтарэньне апэрацый аналізу) на шчолачнасьць іх ніякага ўплыву не зрабілі. Ясна, што такія колькасьці без увядзеньня належнай папраўкі зусім скажалі-б рэзультаты аналізу. Параўнаньне вагаснага мэтаду з аб'ёмным у яго новай мадыфікацыі, з папраўкаю на шчолачнасьць фільтраў і са ўжываньнем адваротнага цытраваньня, дало поўнае супаданьне. Дзеля гэтага мною ў гэтай працы азначэньне магнія рабілася наступным чынам: у шклянку з асадам, фільтрам і 25—30 к. см. вады даліваўся лішак $^1/_{10}$ N HCl; фільтр з асадам разбоўтваўся ў жыжцы і праз 10—15 хвілін адцытроўваўся дэцынармальным растворам едкага калі. Праўда, трэба зазначыць, што для дакладнасьці цытраваньня тут патрэбен мэціл-аранж вельмі добрай якасьці, каб ня цяжка было ўгледзець пераход колеру.

Даныя аналізу:

Цяпер пяройдзем да вывучэньня аб'екта аналізу і рэзультатаў аналітычнага даследваньня. Што да выбранага мною мэтаду вывучэньня аналітычнага матар'ялу па асобных кампанентах, дык я лічу, што ён дасьць больш магчымасьці ўявіць сабе наогул характар працэсаў, што адбываюцца ў расьліне, чым вывучэньне гэтых працэсаў па асобных ворганах, хоць як той, так і другі спосаб маюць свае вартасьці і недахопы.

Сухая маса:

Намнажэньне сухой масы аўсом паказана ў наступнай табліцы, і для нагляднасьці тое-ж самае паказана ў вобразе графікам № 1.

Табл. V.

Намнажэньне і разьмяшчэньне па асобных ворганах сухой масы.

Месяц і дзень.	Абсалютна сухая маса на 100 расьлін у грамах.						Сухая маса асобных ворганаў у %% ад наземнай.			
	Агульн.	Надземн.	Карэньні	Каласкі.	Лістав. пласткі.	Сьцяб.	Каласкі.	Лістав. пласткі.	Сьцяблі.	Карэн.
10 чэрвеня . .	13.4	11.7	1.7	—	7.4	4.3	—	63.2	36.8	14.5
20 „ . .	60.3	53.2	7.1	—	38.4	14.8	—	72.2	27.8	13.3
30 „ . .	112.8	101.0	11.8	—	43.1	57.9	—	42.7	57.3	11.7
10 ліпеня . . .	270.7	251.8	18.9	16.7	47.1	188.0	6.6	18.7	74.7	7.5
20 „ . . .	331.4	306.6	24.8	43.7	57.4	205.5	14.3	18.7	67.0	8.9
30 „ . . .	380.0	355.2	24.8	76.8	49.4	229.0	21.6	13.9	64.5	7.0
20 жніўня . . .	486.4	447.2	39.2	115.6	47.3	284.3	25.9	10.6	63.5	8.8

Як відаць з паказанага, намнажэньне сухой масы аўсом цягнецца да самага канца вэгэтацыі, да моманту поўнай сьпеласьці. Па асобных ворганах гэты працэс адбываецца наступным чынам. У першую чаргу найбольш інтэнсіўна разьвіваецца асыміляцыйны апарат расьліны—ліставыя пласткі, складаючы ў пэрыяд стадыі кусткаваньня 72$^0/_0$ усяе наземнай масы. Пасьля гэтага намнажэньне сухой масы ліставымі пласткамі скарачаецца; яна дасягае максімуму к стадыі красаваньня, пасьля чаго, у зьвязку з адыходам плястычнага матар'ялу ў гэнэрацыйныя ворганы, зьніжаецца. Пасьля скончэньня кусткаваньня і разьвіцьця ліставых ворганаў ідзе пабудова сьцябла; інтэнсіўнасьць гэтага працэсу крыху паніжаецца з моманту высыпаньня. Разьвіцьцё каласкоў і карнявой масы адбываецца вельмі роўнамерна, але з рознаю інтэнсыўнасьцю. Нарэшце, к паўнай сьпеласьці сухая маса разьмяшчаецца па асобных ворганах гэтак: ліставыя пласткі—10,6$^0/_0$ ад усяе надземнае масы, сьцяблы з ліставымі похвамі — 63,5$^0/_0$ і каласкі з зярнятамі 25,9$^0/_0$.

Тут зьвяртае на сябе ўвагу надта нізкі процант зярнят. Як выявілася, гэтае зьявішча цалком залежыць ад умоў вэгэтацыі 1924-га году, дзеля таго, што ўраджай 1923 году пры гэткай-жа прыблізна абсалютнай велічыні (360 п. на 1 дзесяціну) на гэтым-жа вучастку і гэтага-ж сорту аўса трымаў каля 37,7$^0/_0$ чыстых зярнят. Сяўба аўса ў 1923 годзе была зроблена таго-ж дня, як і ў 1924-м г., г. з. 15 траўня, але поўнай сьпеласьці ён дасягае толькі 4-га верасьня. Такім чынам пры іншых роўных умовах вэгэтацыйны пэрыяд быў больш на 15 дзён і, нібы адпаведна гэтаму, процант зярнят больш на 50$^0/_0$. З мэтаю высьвятленьня такой розьніцы я падаю мэтэаралёгічныя даныя за 1923 і 24 г. г.

Табл. VI.

ДЭКАДЫ	Сярэднія велічыні			Колькасьць ападкаў у мм.	Сярэднія велічыні			Колькасьць ападкаў у мм.
	Сярэдняя сутачная t^0	Адносная вільготнасьць	Хмарн. аб 1-й г.у. дзень		Сярэдняя сутачная t^0	Адносная вільготнасьць	Хмарн. аб 1-й г.у. дзень	
1 чэрвеня—10 чэрвеня .	11,7	70,1	8,1	25,0	15,9	75,7	6,1	61,6
11 „ —20 „ .	15,2	73,1	7,5	17,0	17,2	73,0	4,6	10,2
21 „ —30 „ .	14,4	82,1	9,4	33,6	16,2	78,2	7,6	29,0
1 ліпеня —10 ліпеня .	17,6	69,6	6,7	9,6	16,4	75,3	6,6	17,7
11 „ —20 „ .	18,9	73,0	6,1	72,6	15,5	81,5	8,8	47,8
21 „ —30 „ .	14,8	81,5	9,1	21,9	19,7	72,5	7,4	17,7
31 „ —10 жніўня .	14,3	83,2	8,9	74,6	19,3	69,9	6,1	12,8
11 жніўня —20 „ .	13,0	79,1	7,1	26,7	18,8	70,5	3,6	0,8
21 „ —30 „ .	14,8	78,5	6,4	17,5	—	—	—	—
31 жніўня — 4 верасьня .	15,0	79,0	6,5	7,1	—	—	—	—

Дзеля таго, каб мець які-небудзь крытэры пры параўнаньні прыведзеных даных з мэтаю высьвятленьня іх уплыву на разьвіцьцё аўса, пабачым да якіх вывадаў прыходзяць дасьледчыя па гэтаму пытаньню.

І. Віхляеў [1]) у артыкуле „Критический период в развитии овса“ на падставе сваіх нагляданьняў і на падставе ранейшых **Пульмана**, **Скраштаева**, **Бельскага**, **Лявіцкага** і **Стэбута** прыходзіць да наступных вывадаў.

1) Колькасьць атмасферных ападкаў на працягу ўсяго вэгэтацыйнага пэрыяду знаходзіцца ў простай залежнасьці да ўраджаю аўса і працяжнасьці вэгэтацыйнага пэрыяду (які, што відаць з прыведзеных аўтарам даных, вар'іруе ў межах 87—131 дня А. Л).

2) Сярэдняя тэмпэратура—у адваротнай залежнасьці да таго-ж.

3) Ураджай аўса знаходзіцца ў простай залежнасьці да вільготнасьці глебы ў пэрыяд перад і ў час высыпаньня: высокая вільготнасьць—добры ўраджай, нізкая—дрэнны.

4) Чым менш градусаў цяпла прыпадае на 1 мм. ападкаў перад і ў час высыпаньня на працягу ўсяго вэгэтацыйнага пэрыяду, тым вышэйшы ўраджай і наадварот.

5) Сярэдняя хмарнасьць і колькасьць дзён з ападкамі на працягу ўсяго вэгэтацыйнага пэрыяду знаходзіцца ў простай залежнасьці да ўраджаю аўса.

6) Чым вышэй адносная вільготнасьць паветра, перад і ў час высыпаньня, тым вышэйшы ўраджай.

Дзеля таго, што істотных разгалосьсяў у літаратуры па гэтаму пытаньню няма, я абмяжуюся прыведзенымі данымі.

Дапасоўваючы гэтыя палажэньні да нашага выпадку і прымаючы пад увагу, што, як відаць з табліцы VI, мэтэаралягічныя ўмовы 1923 і 1924 году ад пачатку вэгэтацыі і да 20/VII амаль што зусім схожы, можам адзначыць, што ўплыў „крытычнага пэрыяду“ (у нашым выпадку ад 1/VII да 20/VII) ня мог адбіцца адмоўна на проценту зярнят у ўраджаі, таму што ўмовы гэтага пэрыяду ў абодвых выпадках былі зусім добрыя (у залежнасьці ад гэтага і абсалютныя ўраджаі, як зярнят, так і саломы таксама ня могуць лічыцца нізкімі ў абодвых выпадках). Пасьля 20/VI кліматычныя фактары 1923 і 1924 г. г. рэзка разыходзяцца—застаюцца вельмі памыснымі для 1923 году і надта непамыснымі (высокая тэмпэратура, нізкая адносная вільготнасьць, мінімальная хмарнасьць, нязначнасьць ападкаў) для 1924 году. Так што рашучы ўплыў на значнае паніжэньне проценту зярнят ў ураджаі і хуткае дасьпяваньне трэба прыпісаць на сухасьць пэрыяду наліваньня зярнят, з якога боку асабліва вызначылася апошняя дэкада ад 10/VIII да 20/VIII.

Аналягічныя нагляданьні для пшаніцы даюць **Дэгэрэн і Дзюпон** [2]) і **П. Мелікаў**[3]). Уласьне кажучы імі зазначана, што ў выпадку сухасьці апошняга пэрыяду вэгэтацыі пшаніцы, зерня пры падвышанай бялковасьці і попельнасьці зьніжае ўраджай. Аўтары тлумачаць гэта тым, што цяга азотнай матэрыі ў зерня пшаніцы спыняецца к стадыі малочнай сьпеласьці, між тым, як, што ўстанаўляецца работамі **І. П'ера**, **Бэртэло і Андрэ**, крухмал намнажаецца ў самы апошні пэрыяд, нават пасьля ўсыханьня лісьця. Пры асаблівай сухасьці апошняга пэрыяду сьцябло хутка ўсыхае і ў зярняці колькасьць бялку застаецца сталаю, а крухмалу аказваецца

---

[1]) И. Вихляев. Жур. Оп. Агр. 1908 г. стр. 257.

[2]) Дегерен и Дюпон. Ann. Agron. 1902. XXVIII p. 522.

[3]) П. Меликов. Жур. Оп. Агр. 1900 г. стр. 256.

значна менш, што знадворна і праяўляецца ў падвышэньні проценту азоту ў зерні і зьніжэньні проценту зярнят у ўраджаі. Вельмі магчыма, што гэткае тлумачэньне можна даць і да аўсоў; гэта нібы сьвярджаецца выпадкам, які я разглядаю. Калі паданае тлумачэньне вернае, дык тады можна было-б выказаць і больш агульнае тлумачэньне, а іменна, што ўсякая прычына, спыняючая ці асабляючая сынтэз і падачу ў зерня вугляводаў, як напрыклад, недахоп калію, знадворна праявіцца ў зьніжэньні ўраджаю зерня і ў падвышэньні яго бялковасьці.

Агульная попельнасьць.

Табліца VII.

Намнажэньне і разьмяшчэньне па асобных ворганах нячыстага попелу ў аўса.

Месяц і дзень	Колькасьць нячыстага попелу на 100 расьлін у грамах						Няч. попел у $^0/_0{}^0/_0$ ад сухой масы						Няч. попел асобн. ворганаў у $^0/_0{}^0/_0$ ад надземнай масы			
	Агульная	У надземн. частцы	У карэньнях	У каласкох	У ліставых пластках	У сьцяблох	Агульны	У надземн. частцы	У карэньнях	У каласкох	У ліставых пластках	У сьцяблох	Каласкі	Ліставыя пласткі	Сьцяблы	Карэньні
10/VI	1,89	1,53	0,36	—	0,98	0,55	14,1	13,1	21,0	—	13,2	12.8	—	64,1	35,9	23,5
20/VI	9,00	6,87	2,13	—	4,99	1,88	14,9	12,9	30,0	—	12,9	12,7	—	72,6	27,4	31,0
30/VI	15,38	12,49	2,89	—	6,35	6,14	13,6	12,3	24,5	—	14,7	10,6	—	50,9	49,1	23,1
10/VII	30,45	24,94	5,51	0,90	7,32	16,72	11,3	9,9	29,1	5,4	15,5	8,9	3,2	29,4	67,4	22,1
20/VII	29,03	25,53	3,50	2,28	8,62	14,63	8,8	8,3	14,1	5,2	15,0	7,1	9,0	33,7	57,3	13,7
30/VII	30,48	26,36	4,12	4,45	7,63	14,28	8,0	7,4	16,6	5,8	15,4	6,2	16,0	28,9	54,2	15,6
20/VIII	51,77	36,71	15,06	5,62	8,61	22.48	10,7	8,2	38,4	4,9	18,2	7,9	15,3	23,5	61,2	41,0

Як відаць з прыведзеных у табліцы даных, часткаю прадстаўленых графікам № 2, колькасьць попелу ў расьліне хутка ўзрастае да пэрыяду высыпаньня, далей застаецца амаль што стацыянарнаю, у апошнюю-ж дэкаду ізноў імпэтна ўзрастае; у процантах на сухую масу попельнасьць бязупынна падае, дасягае мінімуму 30/VII, а за апошнюю дэкаду таксама падвышаецца. У каласкох намнажэньня золы ідзе бязупынна да моманту пэўнай сьпеласьці, прычым асабліва інтэнсыўна ў пэрыяд канца красаваньня і пачатку наліваньня; у процантах перад пачаткам наліваньня вызначаецца нязначны максімум. Найбольш энэргічна намнажэньне попелу, таксама, як гэта было ўжо зазначана адносна сухой масы, адбываецца ў ліставых пластках; максімум намнажэньня прыпадае на 20/VII, пасьля чаго бывае адыход попельнай матэрыі; апошняя дэкада, як і ўва ўсіх іншых ворганах, дае падвышэньне. У сьцяблох процантава попел трацішча з яўна выражаным мінімумам спачатку наліваньня у абсалютных-жа велічынях наглядаецца два максімумы — першы меншы 10/VII, а другі большы 20/VIII. У карэньнях таксама адбываюцца значныя хістаньні колькасьці попелу, як у абсалютных велічынях, так і ў процантавых адносінах. Для высьвятленьня характару зьмяненьня попельнасьці у карэньняў я падаю наступную табліцу.

Табл. VIII.

Процантавы склад попелу карэньняў.

Месяц і дзень	$^0/_0$ нячыст. попелу	У $^0/_0{}^0/_0$ ад агульнай колькасьці нячыстага попелу				
		P_2O_5	R_2O_3	CaO	MgO	Усяго падліч. элемэнт.
10 чэрвеня	21,0	4,89	10,33	4,00	2,11	21,33
20 „	30,0	3,21	6,43	3,08	1,59	14,31
30 „	24,5	3,95	6,31	2,41	1,63	14,30
10 ліпеня	29,1	2,83	6,43	3,52	1,03	13,81
20 „	14,1	4,85	10,76	3,58	1,55	20,74
30 „	16,6	3,88	9,00	2,95	1,32	17,15
10 жніўня	13,4	4,48	11,79	3,36	1,29	20,92
20 „	38,4	1,32	6,62	2,41	0,77	11,12

Уявіць нейкую законамернасьць зьмен процантавых і абсалютных велічынь агульнага попелу і асобных элемэнтаў попелу ў карэньнях на першы погляд вельмі цяжка. Але калі мы параўнаем гэтыя даныя з мэтэаралягічнымі фактарамі (табл. VI), дык адразу ўбачым паміж іх простую сувязь. Уласьне кажучы, як абсалютная колькасьць попелу, таксама процантавае разьмяшчэньне па асобных ворганах, колькасьць падлічаных элемэнтаў і процант попелу ад сухой масы, зьмяняюцца ў правільнай залежнасьці ад колькасьці ападкаў і тэмпэратуры, якія характарызуюць вільготнасьць глебы (на вялікі жаль, даных непасрэдных нагляданьняў над зьменамі вільготнасьці глебы я ня маю). Асабліва гэта кідаецца ў вочы для 20/VII і 20/VIII.

Дэкада ад 10/VII да 20/VII вызначаецца надта вялікаю параўнальна колькасьцю ападкаў—47,8мм., мінімальнаю за ўвесь пэрыяд вэгэтацыі сярэдняю тэмпэратураю—15,5°С, максімальнаю адноснаю вільготнасьцю—81,5$^0/_0$ і максімальнаю хмарнасьцю—8,8 балаў. У выніку ўплыву гэтых фактараў у попеле карэньняў к 20/VII адбыліся наступныя зьмены параўнальна са станам за 10/VII: зьмяншэньне колькасьці попелу на 36,5$^0/_0$, павялічэньне проценту падлічаных элемэнтаў, за кошт павялічэньня амаль што выключна фосфарнай кісьлі і паўтарачных вокіслаў, таксама на 51,5$^0/_0$.

Дэкада ад 10/VIII да 20/VIII вызначаецца адваротнымі мэтэаралягічнымі ўмовамі—поўнаю адсутнасьцю ападкаў, параўнальна высокаю тэмпэратураю –18,8°С, мінімальнаю адноснаю вільготнасьцю—70,5$^0/_0$ і мінімальнаю хмарнасьцю—3,6 балаў. Згодна з гэтым колькасьць попелу ў карэньнях (з прычыны адсутнасьці лічбаў за 10/VIII абсалютная колькасьць раўнуецца з 30/VII) павялічылася на 265,5$^0/_0$, процант попелу павялічыўся на 186$^0/_0$, а процант падлічаных элемэнтаў паменшыўся на 46,8$^0/_0$ за кошт тэй самай матэрыі.

Сярод аналітычных лічбаў ёсьць яшчэ два тэрміны, што набліжаюцца да такіх за 20/VII—10/VI і 10/VIII. Мэтэаралягічныя ўмовы належных дэкад у першым выпадку кажуць самі за сябе; за 10—VII гэта ня так яскрава, але мы будзем мець падобны малюнак, калі сгрупуем мэтэаралягічныя даныя па пэнтадах. Ад 26/VII да 31/VII тэмпэратура—20,9°С, ападкі—6,9мм.; ад 1/VII да 5/VIII тэмпэратура 20,0°С, ападкі—1,1 мм.; ад 6/VIII да 10/VIII тэмпэратура—18,6°С, ападкі—11,7мм. З гэтых даных відаць, што на попеле карэньняў за 10/VIII адбыўся ўплыў апошняй пэнтады якая параўнальна значна адмяняецца ад дзьвёх папярэдніх.

Адзначаючы факт непасрэднай сувязі паміж зьмяненьняў попельнасьці, пакуль што толькі карэньняў, і мэтэаралёгічных фактараў, можна са значнаю доляю праўдападобнасьці характар гэтай сувязі прадставіць у наступным відзе. Пры збытку выпадзеньня атмасфэрных ападкаў глебавы раствор разжыжаўся і паступлeньне мінэральнай матэрыі ў расьліну з глебы часова спынялася; а дзеля таго што асыміляцыя ня спынялася і інтэнсыўнасьць цёку вады ўгару па трубачках узмацнялася, прасоўваньне растварымых соляй у асымілірующыя ворганы з карэньняў ня спынялася, што і запрычынілася зьбядненьчю апошніх. Пераважнае-ж затрыманьне ў карэньнях паўтарачных вокіслаў і фосфарнай кісьлі прымушае дапусьціць частковае выпадзеньне фосфатаў жалеза і алюмінія асадам пасьля паглынаньня іх з раствораў. З другога боку адсутнасьць ападкаў, высокая тэмпэратура і інсаляцыя значна зьніжалі вільготнасьць глебы і павялічвалі канцэнтрацыю глебавага раствору, што пры асматычным выраўніваньні канцэнтрацый і запрычынілася значнаму падвышэньню попельнасьці, як карэньняў, таксама і ўсяе расьліны, і належнаму якаснаму зьмяненьню яе складу.

Фосфарная кісьля.

Табл. IX.

Намнажэньне і разьмяшчэньне па асобных ворганах аўса P_2O_5.

Месяц і дзень	Колькасьць P_2O_5 на 100 расьлін у грам.						P_2O_5 у %/% ад сухой масы						P_2O_5 асобных ворганаў ад надземнай			
	Агульная	У надзем. частцы	У карэньнях	У каласкох	У ліставых пласткох	У сьцяблох	Агульная	У надзем. частцы	У каласкох	У ліставых пластках	У сьцябл.	У карэньнях	Каласкі	Ліст. пласт.	Сьцяблы	Карэньні
10/VI	0,282	0,265	0,017	—	0,184	0,081	2,105	2,260	—	2,482	1,878	1,038	—	69,5	30,5	6,7
20/VI	1,261	1,193	0,068	—	0,986	0,207	2,091	2,242	—	2,568	1,395	0,961	—	82,7	17,3	5,8
30/VI	1,982	1,868	0,114	—	1,094	0,774	1,757	1,850	—	2,538	1,337	0,968	—	58,5	41,5	6,1
10/VII	3,060	2,904	0,156	0,216	0,849	1,839	1,129	1,153	1,300	1,802	0,974	0,824	7,5	29,2	63,3	5,4
20/VII	2,866	2,697	0,169	0,330	0,696	1,671	0,865	0,880	0,754	1,213	0,813	0,680	12,2	25,8	62,0	6,3
30/VII	3,143	2,983	0,160	0,581	0,591	1,811	0,827	0,840	0,757	1,197	0,791	0,645	19,5	19,8	60,7	5,3
20/VIII	3,791	3,592	0,199	1,134	0,492	1,966	0,778	0,803	0,981	1,040	0,610	0,509	31,6	13,7	54,7	5,6

Намнажэньне фосфарнай кісьлі расьлінаю адбываецца ў першы пэрыяд вэгэтацыі да стадыі высыпаньня і пачатку красаваньня, пасьля-ж гэтага адбываецца толькі перамяшчэньне яе з аднаго воргана ў другі.

Гэта палажэньне, якое можна лічыць правільным і да іншай пажыўной матэрыі, з бязумоўнасьцю выходзіць з існуючых літаратурных даных, як для аўса таксама і для некаторых іншых злакавых расьлін; некаторае, праўда, падвышэньне пры аналізе агульнай масы можа быць вынікам падрастаньня. Але ў разгледжаным мною выпадку пры самым канцы вэгэтацыі наглядаецца павялічэньне колькасьці P_2O_5 каля 25% (бач. табл. IX і графік № 3). Гэткае павялічэньне ўжо ня прыходзіцца тлумачыць уплывам падрастаньня, а яно можа быць высьветлена, як і адзначанае вышэй агульнае павялічэньне попельнасьці ў апошні пэрыяд, толькі ўплывам мэтэаралягічных фактараў—адсутнасьцю ападкаў, нязначнаю адноснаю вільготнасьцю і хмарнасьцю і высокаю тэмпэратураю, што ўсё разам выклікае значнае павялічэньне канцэнтрацыі глебавага раствору. Значыцца, у выпадку яўнага нарушэньня роўнавагі глебавага раствору і клетачнага соку расьліны, намнажэньне можа быць і пасьля пачатку красаваньня, хоць гэта ўжо і ня выклікаецца тады фізыялягічнаю патрэбнасьцю расьліны ў фосфарнай кісьлі, як пажыўной матэрыі. Праўда, у апошнім выпадку можна гаварыць аб фізыялёгічнай патрэбнасьці расьліны захаваць сябе ад пагібелі з прычыны страты тургару, але гэта працэс ужо больш фізычны.

Дынаміка фосфарнай кісьлі па асобных органах прадстаўляецца ў наступным відзе. Найбольш энэргічна намнажэньне ідзе ў ліставых пластках; пры надзвычайна высокім процантавым зьмесьце (2,5%) у абсалютных велічынях ліставымі пласткамі намножана за першы пэрыяд ад 25/V да 20/VI — 26% усяе фосфарнай кісьлі, якую расьліна ўбірае за ўвесь пэрыяд вэгэтацыі. Максімум колькасьці P_2O_5 у ліставых пластках прыпадае на тэрмін за 30/VI, а можа быць і яшчэ на некалькі дзён далей. Пасьля максімуму пачынаецца зьмяншэньне колькасьці фосфарнай кісьлі, і цягнецца яно да канца вэгэтацыі з прычыны адыходу кісьлі ў гэнэрацыйныя органы. Што тут ёсьць, ці толькі адыход P_2O_5 з ліставых пласткоў, ці перавышэньне адыходу над надыходам, сказаць нельга. Тая акалічнасьць, што к канцу вэгэтацыі ў ліставых пластках аказалася 0,492 гр. на 100 расьлін, замест 1,094 гр. за 30/VI, г. з. відавочная страта роўна 0,602 гр. тады, як толькі каласкі намножылі за гэты час 1,334 гр., пры няпэўнай праўдападобнасьці дапушчэньня, што фосфарная кісьля можа падавацца з карэньняў проста ў зерня, мінаючы лябараторыю першапачатковага сынтэзу, кажа за тое, што ўгледжаная страта P_2O_5 у ліставых пластках ёсьць толькі перавышэньне расходу над прыходам. Калі-ж прыняць пад увагу, што тую-ж функцыю асыміляцыі часткова робяць і ліставыя похвы і зялёныя часткі сьцябёл, дзе таксама ёсьць значнае намнажэньне P_2O_5 і аддача яе, дык дакладнасьць падданага вышэй доваду зьмяншаецца. Калі-ж палічыцца яшчэ з тым, што паступленьне P_2O_5 у расьліну, як агульнае паказанае намі правіла,канчаецца к пэрыяду калашэньня і пачатку красаваньня, дык гэта прымусіць нас прыняць першае палажэньне, іменна, што тут ёсьць толькі адыход P_2O_5. У каласках, у абсалютных велічынях P_2O_5 правільна узрастае да самага моманту поўнай сьпеласьці, у процантах-жа на сухую масу каласкі пры высыпаньні маюць параўнальна значную колькасьць P_2O_5—1,3%; к часу красаваньня ён падае да 0,754%, а ў час наліваньня ізноў узрастае да 0,981%. К моманту поўнай сьпеласьці ў каласках намножылася ўсяго толькі 31,6% фосфарнае кісьлі ад агульнае колькасьці яе ў надземнай масе — процант надзвычайна нізкі. У сьцяблох дакладна паўтараецца малюнак зьмяненьняў ува усёй расьліне; у процантавым стасунку колькасьць P_2O_5 бязупынна падае да самага канца вэгэтацыі, застаючыся к моманту поўнай сьпеласьці ўсё-ж надта высокай, лічучы, як на сухую масу сьцябёл (0,61$^0/_0$), таксама і ў процантах ад агульнай колькасьці P_2O_5 у надземных ворганах (54,7$^0/_0$).

Трэба адзначыць, што за дэкаду ад 10/VII да 20/VII страчана P_2O_5 у колькасьці 0,194 гр. на 100 расьлін, што ад агульнай колькасьці дасьць 6,3$^0/_0$. Дзеля таго, што падобны факт наглядаецца за гэты-ж пэрыяд і для CaO і для MgO, іменна CaO страцілася 0,157 гр., што дае 10,7$^0/_0$ і MgO — 0,180 гр., што дае 20,9$^0/_0$ ад агульнай колькасьці, дык тут ня можа быць і гаворкі аб якой-небудзь выпадковай хібнасьці аналізу.

Факт страты попельнай матэрыі расьлінамі даведзен многалікавымі дакладнымі дасьледамі. I. Pier'a, Arendt'a[1]), G. André[2]), Wimmer'a[3]), Th. Pfeiffer'a[4]) P. L. Gile[5]), I O. Carrero, L. Seidler'a і Stuzer'a[6]) і шмат іншымі, і зьяўляецца агульнапрызнаным. Гэтыя-ж досьледы паказалі, што страта попельнай матэрыі адбываецца ў пэрыяд ад красаваньня і далей да канца вэгэтацыі, прычым для K і Na яна наглядаецца амаль што заўсёды і ў асобных выпадках дасягае значных разьмераў — 66$^0/_0$ для Na і 40$^0/_0$ для K; для N, P_2O_5, Ca і Mg гэтае зьявішча менш стала і страты хістаюцца ў межах ад 0 да 20$^0/_0$. Што-ж да прычын і кірунку, праз якія адбываюцца гэтыя страты, дык гэта пытаньне яшчэ мала высьветлена, і па ім да гэтага часу яшчэ ня зусім дагаварыліся.

Лічучы непатрэбным займацца тут тэарэтычнымі меркаваньнямі па гэтаму пытаньню і пакідаючы гэта да бліжэйшай будучыні, калі дасьледваньне дадатковага матар'ялу, сабранага ў тым-жа 1924 годзе, а можа быць і некаторыя экспэрымэнтальныя вышукваньні, дадуць магчымасьць гаварыць больш пэўна і довадна, я пакуль што абмяжуюся паказаньнямі на тое, што страта попельнай матэрыі прыпадае на адзначаную ўжо дэкаду ад 10/VII да 20/VII, якая яўна вызначаецца з мэтэаралягічнага боку. Гэты факт я лічу далёка не выпадковым

Другім фактарам. што зьвяртае на сябе ўвагу пры разглядзе дынамікі фосфарнай кісьлі ў аўсе, зьяўляецца ненармальна высокі процант яе ў сьцяблох. Паказаная акалічнасьць напэўна кажа за тое, што ў глебе быў значны лішак гэтага злучэньня і лішні раз сьцьвярджае палажэньне, што матэрыя, якой знаходзіцца ў глебе з лішкам, намнажаецца з лішкам і ў расьліне. З досыць шырокага артыкулу В. Буткевіча[7]) па літаратуры пытаньня аб магчымасьці дапасаваньня гэтага прынцыпу для азначэньня пладароднасьці глебы шляхам аналізу расьлін выходзіць, што ім сапраўды можна карыстацца, але пры досыць умелай арыентыроўцы і ў уплыве іншых вэгэтацыйных фактараў, ці нівэліруючы іх у кожным асобным выпадку, ці дакладна падлічваючы. Да такога-ж вываду схіляецца і І. Якушкін[8]) які зазначае, між іншым, значную сталасьць складу зерня, асабліва ў аўса, і значныя варыяцыі гэтага складу ў саломе. І. Савін[9]), які пярэчыць магчымасьцы дапасаваньня гэтага мэтаду, кажа, што намнажэньне

---

[1]) Arendt. Vers. St. I 1859.

[2]) G. André. C. R. № 24 і 26 1912 г.

[3]) Wimmer. Vers. St. 1905 стар. 1—70.

[4]) Th. Pfeiffer. Fuhl landw. Ztg. 1919 H $^5/_6$.

[5]) P. L. Gile et I. O. Carrero. Sur. of Agricult. Research. Depart. of. Agriculture. Washington 1915. T. V, стар. 358—364.

[6]) L. Seidler und A. Stutzer. I. Landw. T. 65 1908 г. стар. 273—277.

[7]) В. Буткевич. Отчет сел.-хоз. лаб. Мин. Земл. при Лесном Ин-те за 1898 г. стар. 90—163.

[8]) И. Якушкін. Жур. Оп. Агр. 1915. стар. 118.

[9]) И. Саввин. Жур. Оп. Агр. 1916 г. стар. 1—12.

фасфатаў у саломе паказвае на лішак P_2O_5 у расьліне, але ня ў глебе, дзеля таго што пры адных і тых самых колькасьцях P_2O_5 у пажыўным растворы (пясковыя культуры) пры розных ураджаях расьліна ці намнажае яе ў саломе, ці не. Я лічу, што гэтую пярэчнасьць можна прыймаць ня як пярэчнасьць, а як сьцьвярджэньне, дзеля таго што паказаны аўтарам выпадак гаворыць за тое, што для вырабу адной масы ўраджаю колькасьць P_2O_5 у пажыўным растворы было з лішкам, а для другой, большай—з недахопам.

Паўтарачныя вокіслы

Табліца X.

Намнажэньне і разьмяшчэньне па асобных ворганах $Fe_2O_3 + Al_2Q_3$

Месяц і дзень	Кольк. $Fe_2O_3+Al_2O_3$ на 100 расьлін у грамах						Fe_2O_3 у $^0/_0{}^0/_0$ ад сухой масы						R_2O_3 асобных ворганаў у $^0/_0{}^0/_0$ ад надземнай			
	Агульная	У надземн. частцы	У карэньнях	У каласкох	У ліставых пласткох	У сьцяблох	Агульная	У надземн. частцы	У карэньнях	У каласкох	У ліставых пласткох	У сьцяблох	Каласкі	Ліставыя пласты	Сьцяблы	Карэньні
10 чэрв.	0,074	0,037	0,037	—	0,027	0,010	0,554	0,316	2,185	—	0,363	0,234	—	72,7	27,3	100,0
20 „	0,294	0,157	0,137	—	0,123	0,034	0.487	0,294	1,930	—	0,300	0,228	—	78,4	21,6	87,4
30 „	0,381	0,199	0,182	—	0,129	0.070	0,338	0.197	1,545	—	0.300	0,120	—	65,0	35,0	91,7
10 ліпен.	0,648	0,294	0,354	—	0,137	0,157	0,239	0,117	1,875	—	0,292	0,083	—	46,7	53,3	120.4
20 „	0.710	0,334	0,376	0,025	0,199	0,110	0,214	0,109	1,519	0,057	0.347	0.059	7,4	59,7	32,9	112,9
30 „	0,709	0,331	0,378	0,041	0,198	0,092	0,187	0,093	1,523	0,053	0,402	0,042	12,3	59,8	27,8	113,9
20 жніўн.	1,443	0,446	0,997	0,060	0,139	0,247	0,297	0,100	2,544	0,052	0,296	0,087	13,5	31,1	55,4	224,0

Паўтарачныя вокіслы азначаліся мною толькі дзеля таго, што пры азначэньні CaO і MgO іх трэба было выдаліць, чаму сума не падзялялася на Fe_2O_3 і Al_2O_3. Гэтая акалічнасьць, а таксама паказаныя вышэй недахопы скарыстанай мэтодыкі, не дазваляюць сказаць чаго-небудзь пэўнага аб гэтых злучэньнях і іх дынаміцы, дзеля чаго адносна да іх я абмяжуюся толькі самымі агульнымі ўвагамі.

Намнажэньне паўтарачных вокіслаў, таксама як і іншай попельнай матэрыі (бач табл. X і графік № 4), амаль што спыняецца пасьля стадыі каласаваньня; за апошнюю дэкаду колькасьць іх падваяецца. З надземных ворганаў больш за ўсё паўтарачных вокіслаў знаходзіцца ў ліставых пласткох. У зерні процантавая колькасьць іх амаль што не мяняецца і намнажэньне, праўда нязначнае, адбываецца прапарцыянальна сухой масе. Зьвяртае на сябе ўвагу намнажэньне паўтарачных вокіслаў у карэньнях, дзе іх затрымоўваецца больш $^2/_3$ усяе паглынёнае расьлінаю колькасьці; гэта прымушае гадаць аб частковым, як мы ўжо бачылі, выпадзеньні іх з раствору ў відзе асаду $FePO_4$, а галоўным чынам, здаецца, пераход да калёіднага стану ў відзе гідрату. Апошняя акалічнасьць накіроўвае думку аб ролі соляй жалеза ў расьлінах, як рэгулятараў рэакцыі асяродку ў каморках расьлін. Ці ня ў гэтым зьмяшчаецца адна з важных функцый маларухомага жалеза ў расьліне і між іншым, што да такой высокаадчуваючай да зьмен рэакцыі матэрыі, як хлёрафіль?

Вапна и магнэзія.

Табл. XI.

Намнажэньне і разьмяшчэньне па асобных ворганах CaO.

Месяц і дзень	Кольк. CaO на 100 расьлін у грамах						CaO ў %% ад сухой масы						CaO асобн. ворганаў ў %% ад надземнай			
	Агульная	У надземн. частцы	У карэньнях	У каласкох	Ў ліст.пласт.	У сьцяблох	Агульная	У надземн. частцы	У карэньнях	У ліст.пласт.	У сьцяблох	У каласкох	Каласкі	Ліст.пласты	Сьцяблы	Карэньні
10 чэрвеня	0,137	0,123	0,014	—	0,089	0,034	1,027	1,053	0,850	—	1,205	0,791	—	72,4	27,6	11,
20 „	9,697	0,631	0,066	—	0,488	0,143	1,156	1,206	0,923	—	1,271	0,969	—	77,3	22,7	10,
30 „	0,748	0,678	0,070	—	0,493	0,185	0,663	0,672	0,592	—	1,144	0,320	—	72,7	27,3	10,
10 ліпеня	1,457	1.263	0,194	0,074	0,668	0,521	0,538	0,501	1.035	0,445	1,418	0,277	5,9	52,9	41.2	15,
20 „	1,300	1,175	0,125	0,122	0,560	0,493	0,392	0,383	0,505	0,280	0,977	0,239	10,5	47,6	41,9	10,
30 „	1,539	1,418	0,121	0,302	0,673	0,443	0,405	0,399	0,490	0,393	1,363	0,193	21,3	47,5	31,2	8,
20 Жніўн.	2,391	2,028	0,363	0,362	0,815	0,851	0,492	0.454	0,925	0.314	1,523	0,294	17,8	40,2	42,0	13,

Табл. XII.

Намнажэньне і разьмяшчэньне па асобных ворганах MgO.

Месяц і дзень	Кольк. MgO на 100 расьлін у грамах						MgO ў %% ад сухой масы						MgO асобн. ворганаў ў %% ад надземнай			
	Агульная	У надземн. частцы	У карэньнях	У каласкох	У ліст.пласт.	У сьцяблох	Агульная	У надземн. частцы	У карэньнях	Ў ліст.пласт.	У сьцяблох	У каласкох	Каласкі	Ліст.пласты	Сьцяблы	Карэньні
10 чэрвеня	0,078	0,070	0,008	—	0,051	0,019	0.581	0,600	0,447	—	0,685	0,453	—	72,2	27,8	10,
20 „	0,434	0.400	0.034	—	0,324	0,076	0,719	0,752	0.476	—	0,843	0,515	—	80,9	19,1	8,
30 „	0,620	0,573	0,047	—	0,362	0,211	0.550	0,566	0,400	—	0,840	0,364	—	63,2	36,8	8,
10 ліпеня	0,820	0,763	0,057	0,042	0,336	0,385	0,303	0,303	0,301	0,254	0,713	0,205	5,6	44,0	50,4	7,
20 „	0.640	0,586	0,054	0,114	0,221	0,251	0.193	0,191	0,219	0.260	0.384	0,122	19,2	38,0	42.8	9,
30 „	0,796	0,742	0,054	0,269	0,192	0,281	0.210	0,209	0,219	0,351	0,389	0,122	36,8	25,9	37,3	7,
20 жніўн.	1,017	0,901	0,116	0,346	0,245	0,310	0,209	0,202	0,296	0,299	0,518	0,109	38,4	27,2	34,4	12,

З разгляданьня вышэйпаданых табліц, а таксама графікаў № 5 і № 6 відаць, што намнажэньне, як CaO, таксама і MgO, падваяе ўжо знаёмы нам малюнак—максімум намнажэньня к 10/VII, потым страта к

20/VII і зноў значнае намнажэньне ў апошнюю дэкаду. Для MgO таксама яўна вызначаецца адыход з лісьця ў каласкі, для CaO гэты працэс адбываецца нібы больш за кошт сьцябёл. Магчыма, што гэта толькі так здаецца. У каласкох намнажэньне CaO і MgO ідзе бязупынна да часу поўнай сьпеласьці, прычым найбольш інтэнсыўна яно ідзе ў дэкаду ад 20/VII да 30/VII, г. з. у пэрыяд красаваньня і пачатку наліваньня; к часу поўнай сьпеласьці ў зерня перацякае 17,8% CaO і 38,4% MgO ад усяе колькасьці надземнай часткі. У момант каласаваньня CaO было ў каласкох у 1,8 разы больш, чым MgO, але к часу красаваньня гэты стасунак набліжаецца да адзінкі і далей падыход іх у каласкі ідзе роўналежна з вельмі невялічкім увесь час лішкам CaO над MgO. Спэцыяльнымі досьледамі S. Schulze і Ch. Godet'a [1]) Willstätter'a [2]) і іншых аўтараў вызначана, што ў зерні злакаў і многіх іншых расьлін MgO зьмяшчаецца значна больш, чым CaO, а ў плеўках—наадварот. У працы В. О. Карнеенкі[3]) мы натыкаемся, між іншым, нават на такі цікавы факт: у дасьледжаных аўтарам зернях вэнгэрскага аўса з плеўкамі і бяз плевак, пры амаль што роўналежным, з невялікаю пераважнасьцю CaO над MgO намнажэньні іх у зярнят з плеўкамі, у голым зерні ў першыя стадыі CaO знайшліся толькі сьляды, і толькі к моманту поўнай сьпеласьці самыя нязначныя колькасьці.

Паводле думкі O. Loew'a [4]) аднэю з функцый магнія ёсьць яго ўдзел у перамяшчэньні па расьліне фосфарнай кісьлі. Поўнасьцю згаджаючыся з гэтаю думкаю, якая сьцьвярджаецца разьмяшчэньнем MgO P_2 0_5 у зерні [5]), я на падставе адзначанай мною роўналежнасьці прыцёку CaO і MgO к гэнэрацыйным ворганам, лічу магчымым выказаць дапушчэньне, што тую-ж функцыю з роўным посьпехам выконвае і кальцы. Тую-ж акалічнасьць, што ў самае зерня CaO пападае ў меншай колькасьці, чым MgO, і лічу праўдападобным тлумачыць затрымліваньнем яго і адкладам у плеўках шчаўлёваю кісьляю, акая выдзяляецца пры сынтэтычнай дзейнасьці зялёных плевак; гэта больш чым праўдападобна, хоць покуль што яшчэ ня сьцьверджана досьледамі.

---

[1]) S. Schulze u Ch. Godet. Trans. Am. Chem. Soc., New. Haven 1908, 30—36.

[2]) Willstätter. Ztschr. f. Physiol. Chem. 58, стр. 438- 439.

[3]) В. О. Корнеенко. Химия скоро и позднoспелых сортов овса. 1922.

[4]) O. Loew. Flora. 75. 1892. 368—394.

[5]) M. Lewy. Zeitschr. f. Unters. d. Nahrungs. u. — Genussum. Bd. 19. Л. 31 — II, 1910 г. стр. 113—136.

Вывады.

Аналітычнае дасьледваньне гэтай працы дае магчымасьць зрабіць наступныя вывады:

1. Намнажэньне сухой масы аўсом цягнецца аж да поўнай сьпеласьці.
2. Умовы „крытычнага пэрыяду“ не прадракаюць цалком ураджаю.
3. Сухасьць апошняга пэрыяду ў разьвіцьці аўса можа выклікаць значнае зьніжэньне проценту зярнят у ўраджаі.
4. Значнае намнажэньне мінэральнай матэрыі можа быць і ў апошніх стадыях вэгэтацыі расьліны, супраць думкі, якая асталявалася ў літаратуры, што гэтае намнажэньне канчаецца к моманту каласаваньня і пачатку красаваньня.
5. Зьмяненьні ў канцэнтрацыі глебавага раствору хутка і яўна адбіваюцца на попельнасьці карнявой сыстэмы, то павялічваючы, то зьніжаючы яе і мяняючы якасны склад.
6. Расьліна пры належных умовах можа траціць попельную матэрыю, што звычайна наглядаецца і зазначаецца ў пэрыяды пасьля высыпаньня і пачатку красаваньня расьліны.
7. Паміж стратаю і намнажэньнем попельнай матэрыі і іх перамяшчэньнем па расьліне—з аднаго боку і мэтэаралягічнымі фактарамі—з другога—наглядаецца простая сувязь.
8. З моманту высыпаньня наглядаецца моцны адыход пажыўной мінэральнай і арганічнай матэрыі з лісьця ў гэнэрацыйныя органы аўса, што асабліва прыкметна для P_2O_5 і MgO.
9. Намнажэньне CaO, MgO і P_2O_5 каласкамі аўса можа адбывацца да моманту поўнай сьпеласьці.
10. CaO і MgO намнажаюцца каласкамі аўса амаль што роўналежна, прычым найбольш інтэнсыўна ў пэрыяд красаваньня і пачатку наліваньня.
11. Да $^2/_3$ паступаючых у расьліну паўтарачных вокіслаў затрымліваюцца ў карэньнях.
12. З надземных органаў прыкметныя колькасьці паўтарачных вокіслаў намнажаюцца ліставымі пласткамі.

Увагі, што да мэтодыкі дасьледваньня.

а) Звычайны ацэтатны спосаб азначэньня сумы паўтарачных вокіслаў вельмі недакладны з прычыны нясталасьці выпадаючай колькасьці P_2O_5.

б) Калі ў растворы, што аналізуецца, ёсьць прыкметныя колькасьці фосфарнай кісьлі, асаджэньне кальцыя павінна рабіцца пры слабым падкісьленьні воцатаваю кісьляю, з мэтаю, каб ухіліцца хібнасьцяй, што могуць быць пры нэйтральным ці слабашчолакавым асяродку.

в) Пры аб'ёмным азначэньні магнія вельмі зручна ўжываць адваротнае цытраваньне едкім калі па мэціл-аранжу.

А. Ю. Лявіцкі.

Мікрарэльеф лёэсавых плято і ўплыў яго на глыбіню пакладу карбанатнага пазёму.

(з нагляданьняў на Стэбутаўскім дасьледчым полі).

Калі глядзець на глебавую карту Эўрапэйскай Расіі [1]), дык Горы-Горкі (б. Магілеўская губ., цяпер Аршанская акруга БССР), ляжаць амаль што ў сярэдзіне шырокай паласы падзолавых глеб. Паводле клясыфікацыі праф. Афанасьева [2]) гэта раён **моцна падзолавых глеб,** які пераходзіць на поўначы ў падзолы, а на поўдні ў зону леса-стэповых глеб.

Як геаграфічны пункт, Горкі характарызуюцца: шырата 54°17′, даўгата 30°59′ на ўсход ад Грынвіцкага палудзеньніку.

Даныя аб кліматалягічных фактарах запазычаны з работ праф. Кайгародава [3]).

Табл. № I.

ЗА ФАКТАРЫ	С	Л	С	К	Т	Ч	Л	Ж	В	К	Л	С	Год	Вэгэтац. пэрыяд
Тэмпэратура паветра . .	−8,2	−7,5	−3,0	4,6	12,5	16,7	18,2	16,2	11,0	4,7	−1,0	−5,8	4,9	15,0
„ глебы на 40 см.	−0,5	−0,5	−0.4	1,2	10,3	15.4	17,0	16,6	13,1	7,9	2,7	0,5	6,9	14,5
„ „ „ 80 „	−0,8	−0,4	0,4	1,1	7,8	13.8	15,5	15,8	13,4	9,0	4,3	1,9	7,0	13,3
Колькасьць ападкаў у мм.	29	25	27	31	42	66	82	68	46	41	39	33	52,9	30,4

Вэгэтацыйным пэрыядам лічыцца час ад траўня да верасьня ўключна.

Трэба зазначыць значную цеплаправоднасьць глеб, дзеля таго, што розьніца тэмпэратур паветра і глебы нязначная, асабліва на працягу вэгэтацыйнага пэрыяду. Сярэдняя моц вятроў 3 — 4 м. ў сэк.; кірунак галоўных вятроў на паўднёвы захад.

Стэбутаўскае дасьледчае поле (гл. карту), дзе рабілася гэтая праца, ляжыць на тэрасападобным вучастку вадападзелу рэк Капылкі і Парасіцы (прытокі ракі Проні, што ўпадае ў Сож).

---

[1]) Складзена Сібірцавым, Танфільлевым і Фэрмхіным, 1900. Маштаб 60 в. у цалі.

[2]) Афанасьев Я. Н. „Зональные системы почв“, Горкі 1924 г.

[3]) Кайгородов А. И. 1) „Температурный режим Горецкого района“.
2) „Осадки, снеговой и ледяной покров Западной Области“ ч. I Осадки. Горки 1924 г.

Глебаўтвараючаю матчынаю пародаю вучастку зьяўляецца тыповы палава-жоўты лёэс, грубінёю каля 10—12 м. Ніжэй ідуць гумозна-балотавыя стварэньні ў 1—1,5 м. грубіні (даўні тарфянік), а пад імі два пласты марэн, падзеленыя пяскамі. Бліжэйшаю карэннаю пародаю будуць, як відаць, вапнякі дэвонскага ўзросту. Грунтовае вады на кантакце лёэсу і марэны тут ня знойдзена.

Мэханічны склад лёэсу наступны:

Табл. 2.

Адрас і №№ перарэзаў	Глыбіня	Пясковых		Пылаватых		Фізычнае гліны < 0,01 мм.	Увага
		> 0,25 мм.	0,25—0,1 мм.	0,1—0,05 мм.	0,05—0,01 мм.		
Горкі, шурф № 1	0—10	0,9	2,4	19,1	46,9	30,7	Паводле Сабаніна
„ шчыліна № 63	220	—	0,3	27.8	49,1	22,8	„ „
„ яма № 82 г. п. . . .	170	0,1	0,6	9,0	61,1	29,2	„ „
„ „ № 61 г. п. . . .	0—10	0,6	1,1	10,0	51,9	36,4	„ „

Як відаць з паданых аналізаў, лёэс больш чым на $^2/_3$ складаецца з частак пясковага пылу, а колькасьць пясковай фракцыі выражаецца ў 0,1—3,0$^0/_0$. Колькасьць фізычнай гліны ў лёэсе хістаецца дужа шырока, як усторч, таксама і паземна.

Прысутнасьць на ўсёй плошчы Стэб. дасьл. поля аднае досыць грубай матчынай пароды пры тэрасападобным тыпе рэльефу і, вядомая рэч, аднакавым клімаце, здаецца, павінна было-б абумовіць стварэньне аднастайнага глебавага насьцілу, з аднастайнымі марфалягічнымі азнакамі, у тым ліку і з аднэю глыбінёю ўскіпаньня. Між тым пры павярхоўным поглядзе на глебавую карту данага вучастку нас дзівіць складанасьць і стракатасьць глебавага насьцілу.

Прычына гэтай стракатасьці ў мікрарэльефе. Амаль што паземная тэраса Стэб. дасьл. поля на ўсім сваім працягу мае выгляд усхваляванага мора, раптам застылага ў нярухомасьці. Грабяні хвал — груды — праз кожныя 30 — 40 м. зьмяняюцца западзінаю паміж іх, далей ізноў уздымаецца гэткай-жа вышыні хваля і зноў зьмяняецца западзінаю і г. д. Падобнасьць да ўсхваляванага мора ўзмацняецца яшчэ тым, што ўсё гэта агулам, як груды, таксама і западзіны выцягнуты з поўначы на поўдзень і раўналежна адно да другога. Паверхня такога характару ідзе ўгару і займае ўвесь вадападзел. Перад намі тыповы малюнак мікрарэльефнага комплексу. Самаю характэрнаю азнакаю такога комплексу зьяўляецца частае чаргаваньне адмоўных элемэнтаў (западзіны, лейкі, ісподачкі, нізінкі, далінкі і інш.) з дадатнымі: (плято, грывы, купалі).

Найбольш поўна і з розных бакоў вывучан мікрарэльеф паўднёвых стэпавых зон. Яшчэ Дакучаеў, працуючы ў зоне чарназёмаў першы зьвярнуў увагу на збытак мікразападзін, „западзіны стракацілі стэп, як восьпіны твар“, паводле яго вобразнага выразу [1]). Але, як кажа праф. Афанасьеў, „западзінныя краявіды“ сустракаюцца ад стэповых (поўдзень)

---

[1]) Докучаев В. В. „Наши степи прежде и теперь“ 1892 г.

да таежных (поўнач) зон, прычым „на пародах ня лёэсавага тыпу **западзінныя палі** сустракаюцца толькі **па аблюбованых** мясцох і параўнальна ня часта“.—„Лёэсавыя-ж плято, як правіла, **заўсёды усеяны** рознымі западзінамі і ў такой ступені, што рэльеф і глебы заўсёды зьяўляюцца тут тыповымі комплексамі“.

З прычыны некаторых непрадугаданых акалічнасьцяй мы ня будзем разглядаць тут літаратуры па мікрарэльефу стэповых зон, хоць ўсё-ж такі трэба адзначыць абшырную манаграфію Дзімо і Кэлера „Из области полупустыни“ [1]), работы Панагайбо па Драбоўскім дасьл. полі [2]) і работы чарнігаўскіх глебазнаўцаў: Афанасьева, Бэрга, Жаўтынскага і Парубіноўскага [3]).

Для падзолавых зон Захараў вызначае тры тыпы рэльефу:

1) дробнагрудны ці купністы.

2) хвалісты.

3) узгоркаваты.

Разьмеры грудоў ці купін першага тыпу мікрарэльефу хістаюцца ў межах ад некалькіх дэцымэтраў да 1—2 м″.; яны ўздымаюцца на 30—50 см. над бліжэйшымі западзінкамі. „На западзінкі прыходзіцца значна большая частка плошчы, чым на ўзгорачкі“.

Другі тып — хвалісты мікрарэльеф аўтар наглядаў у ваколіцах Рыгі на выдмавых пяскох; ён выяўляе чаргаваньне мініятурных град і лагчынак, прычым разьмеры не паказваюцца за выключэньнем аднае „невялічкай другараднай грыўкі“ даўжынёю 5 м. і вышынёю 75 см.; па ёй зьмяніліся тры глебавых тыпы.

Лічбовай характарыстыкі трэцяга тыпу мікрарэльефу ў даступнай мне літаратуры няма; ёсьць толькі паказаньне Туміна [4]) што „тут глыбокіх западзін больш, больш і западзін з вадою, г. з. балотных“. Гяоргіеўскі, Зяметчынскі і Рудніцкі прыводзяць даныя аб зьмяненьні грубіні глебавых пазёмаў па мікрарэльефу без паказаньняў разьмераў элемэнтаў.

Для параўнаньня велічынь мікрарэльефу дадзім разьмеры западзін „у шырокім сэнсе слова“, г. з. лічучы, што западзіна пачынаецца там, дзе пачынаюцца мікрасхілы з паземных пляцкоў ці грыў. Пры чым будзем раўнаваць толькі мікрарэльеф, разьвіты на лёэсах (гл. стар. 204).

Як відаць з паданай табліцы велічыня западзін павялічваецца з поўдня на поўнач, колькасьць іх на адзінку плошчы памяншаецца. На западзіны ў падзолавай зоне прыходзіцца 84,2%. Гэта паказвае на моцную распрацоўку мікрарэльефу, але зусім ня значыць, што запраўды на 84% плошчы глебы жывуць жыцьцём западзін, разумеючы пад гэтым вільготнасьць паверхні, забалочанасьць і г. д. Верхнія часткі схілаў, наадварот, атрымоўваюць у параўнаньні з пляцкамі менш атмасфэрных ападкаў, з прычыны сьцёку іх к цэнтру западзін. Дзеля гэтага ў далейшым у аснову выдзелу западзін „у вузкім сэнсе слова“ пакладзены іншыя спосабы,—адзін натуральна-гістарычны, другі—тапаграфічны.

Аказваецца, што ўся плошча Стэбутаўскага дасьледчага поля доўга размывалася атмасфэрнымі водамі; пачатак гэтага працэсу прыстасоўваецца к моманту узорваньня. Змыты матар'ял адкладываўся на падзолава-балотавыя глебы западзін, у выніку чаго стварыўся наносны (дэлю-

---

[1]) Димо Н. А. и Келлер Б. И. „Из области полупустыни“ 1907 г.

[2]) Понагайбо Н. Д. „Рекогносцировочные работы по изученню микрорельефа на Драбовском оп. поле“ 1915 г. Полтава.

[3]) Сборник под редакцией Берга Л. С. „Предварит. отчет о работах по изучению ест-ист. условий Черногов. губ.“ 1913 г., Москва.

[4]) Тумин Г. М. „Материалы для оценки земель Смоленской губ.“ вып. I, т. IV, Смоленск 1909 г.

Табл. № 3.

Зона	№№ западзін	Характарыстыка	Даўжыня	Шырыня	Плошча ў кв. м.	Глыбіня ў см.	Увага
Падзолавая зона (Горкі, БССР).	VI	Буйная	170	140	20000	275	На адзін гэктар прыходзіцца 0.9 западзін. У %% ад усяе плошчы западзіны займаюць 84,2%.
	I	"	180	120	18000	140	
	IV	"	160	100	15000	250	
	XI	"	160	80	10000	160	
	X	"	100	90	7000	230	
	XI	"	90	80	6000	160	
	VIII	"	110	60	5000	120	
	II	Сярэдняя	70	70	4000	120	
	V	"	70	50	3000	100	
	VII	"	90	—	—	140	
	III	"	—	—	—	150	
		Сярэдняе	120	87.8	9778	168	
Зона леса-стэпу Чарнігаўскай г. 1)	139a	Буйная	120	35	3500	100	
	138a	"	100	40	3500	150	
	540	Сярэдняя	40	35	1500	150	
	541	"	29	23	500	150	
Чарназёмная (Палтаўская г. 2)	—	Буйная	60	50	2500	—	На адзін гэктар 14 западзін. У %% ад усяе плошчы — 50%.
	—	Сярэдняя	45	35	1500	—	
	—	Невялікая	30	20	500	—	
Зона поўпустынь Поўдзень Сараταўскай губ. 3)	I	Аграмадная	44	42	1160	20	На адзін гэктар 8 западзін. У %% ад усяе плошчы — 11,76%+38,14 пад „падзінкамі“
	III	Сярэдняя	20	18	295	14	
	VIII	Невялікая	11	6	58	5	

---

1) Афанасьев Я. Н. „Темноцветные почвы западин лессовых плато Чернигов. губ.“ ж. Русск. Почвовед 1906 г. № 5—6.

2) Понагайбо Н. Д. „Рекогносцировочные работы по изучению микрорельефа на Драбовском оп. поле“ 1915 г. Полтава.

3) Димо Н. А. и Келлер Б. И. „Из области полупустыни“ 1907 г.

віяльны пазём Ad); непасрэдна пад ім ляжыць захаваны пазём A_1 інтэнсыўна-чорнага колеру. Верхнія часткі схілаў, наадварот, змыты аж да пазёму B_2, які цяпер арэцца.

Пашыранасьць захаванай глебы і пакладзена ў аснову натуральна-гістарычнага мэтаду выдзелу западзін у вузкім сэнсе.

Другі спосаб, тапаграфічны,—у вызначэньні па паземніках замкнёнай катліны, якая можа напаўняцца вадою, не пераліваючыся па лагчынах у суседнія паніжэньні (максімальная люстра вады).

Для самых буйных западзін Стэб. дасьл. поля (№ I, II, VI і IX) абодва мэтады сходзяцца, па іншых больш дробных западзінах захаваныя глебы пашыраюцца часам далёка за межы замкнёнай катліны, а для самых маленькіх, далічаных да другой групы, можна прыстасаваць толькі першы спосаб выдзелу дзеля таго што паземнікі праз 20 см. іх зусім не выяўляюць.

Разьмеры западзін першай і другой групы на Стэб. дасьл. полі паказаны ў табл. № 4 (глядзі стар. 206).

Раўнуючы сярэднія вялічыні западзін Стэб. дасьл. поля з іншымі зонамі можна бачыць, што другая група западзін паводле сваіх разьмераў адпавядае буйным нізінкам поўпустынь. Уся-ж першая група, ня гледзячы на тое, што мы лічым тут западзінаю толькі ніжэйшую частку, якая найбольш увільгатняецца, з захаванаю глебаю,—паводле разьмераў элемэнтаў зьяўляецца „волатам“, які не ўкладаецца нават у схэму С. А. Захарава, дзе элемэнты, „мераныя дзесяткамі і сотнямі мэтраў“, адносяцца да макрарэльефу. Але характар чаргаваньня западзін з грудамі і грывамі, выразная комплекснасьць—гаворыць за тое, што тут мы маем справу з мікрарэльефам у яго, нават, найвышэйшай ступені выразнасьці. Пераважнасьць западзін ($84{,}2^0/_0$ ад усяе плошчы) прымушае назваць даны мікрарэльеф **западзінным**.

Дадатныя элемэнты мікрарэльефу, г. з. мікравадападзелы, што аддзяляюць западзіны адну ад другой, паводле іх формы можна падзяліць на тры групы: **плято, грыўкі і купалі**.

Плято маюць больш-менш значны, амаль што паземны пляцок, як рэшта раўніцы пасьля стварэньня западзін. Звычайна на іх ляжаць западзінкі другой групы, а па краёх мікраплято ідуць схілы к сумежным буйным западзінам.

Грыўкі—выцягнутая дахападобная форма; процілеглыя схілы стыкаюцца, паземнага пляцку зусім няма.

Купалі—паземнага пляцку няма, зьверху ва ўсе бакі ідуць схілы к западзінам; паземнікі ўяўляюць сабою амаль што правільныя канцэнтрычныя акружыны.

Разьмеры элемэнтаў плято, купаляў і грыў Стэбутаўскага дасьл. поля паказаны ў табліцы № 5 (глядзі стар. 207).

Паводле даўжыні відочнага схілу (ад верхавіны да цэнтру западзін) дадатныя элемэнты мікрарэльефу сартуюцца па асобных формах гэтак: плято 74 м., купалі 59 м., грыўкі 49,4 м.

Гэты парадак адпавядае ступені распрацоўкі: плято— гэта яшчэ непачатая рэшта раўніны; купалі—тыя-ж плято, але значна зьменшаныя разрослымі западзінамі аж да самай верхавіны купалю; грыўкі—апошняя ступень разьвіцьця западзін, якія стыкнуліся адна з аднэю, чаму схілы значна скарочаны.

Уплыў экспазыцыі на даўжыню і стромкасьць схілаў паказан табліцаю № 6. Паўднёвымі схіламі лічацца павернутыя схілам на поўдзень, паўночнымі—на поўнач і г. д. (глядзі стар. 208).

Разьмеры буйных западзін (першая група)

Табліца № 4.

№№ западзін	Форма	Па пахаванай глебе			Па паземніках (замкнёныя катлiны)				Плошча вадазбору	Абсалютная адзнака дна ў метр.	Увага
		Даўжыня ў м.	Шырыня ў м.	Плошча ў гэктар.	Даўжыня ў м.	Шырыня ў м.	Глыбіня ў м.	Плошча ў гэктр.			
I	Карытападобн. . .	130	40	0,5587	122	40	30	0,3599	2,4313	187,2	
II	Акруглая	52	40	0,2504	52	40	50	0,1848	0,7499	188.0	
III	„	48	48	0,1324	12	12	10	0,0079	0,7820	186,6	
IV	„	80	52	0,4064	66	46	90	0,2727	1.5022	186,6	
V	„	46	30	0,1108	30	24	30	0,0636	0,5179	188.0	
VI	Грыбавідная . . .	88	106	0,9105	88	112	130	0,7545	3.3661	186.8	
VII	Авальная	48	20	0,0911	32	12	10	0,0335	0.6762	188,0	
VIII	„	78	26	0,1593	78	24	40	0,1521	0.7029	188,2	
IX	„	66	22	0,1620	22	8	20	0,0131	0,5631	188,2	
X	Акруглая	52	52	0,3160	52	52	140	0,2557	0.6634	186.6	
XI	Выцягнутая . . .	120	60	0,7590	50	28	30	0,1303	1.5837	186,6	
	Сума	808	496	3,8566	604	398	580	2,2275	13,5387	2060,8	
	Сярэдняе	73	45	0,3506	55	36	53	0,2025	1,2308	187,35	
	Квадрат. памылка ±	9	8	—	10	9	14	—	—	0,22	

Разьмеры дробных западзін (другая група)

№№ западзін	Форма	Па пахаванай глебе			Глыбіня	Увага
		Даўжыня ў м.	Шырыня ў м.	Плошча ў гэктар.		
1	Авальна-выцягнутая з Пн. на Пд.	42	14	0,0577	Менш 10 см.	Апроч таго ў склад Стэб. дасьл. поля ўваходзяць невялікія часткі 3-х западзін, агульнаю плошчаю ў 0,1665 гэкт. і сетка вузкіх амаль няпрыкметных лашчынак і падзінак.
2		24	10	0,0210		
3		18	6	0,0111		
4		28	4	0,0105		
5	Ав.-выц. з ПнЗ на ПдУ	16	10	0.0118		
	Сума . . .	128	44	0.1121		
	Сярэдняе .	26	9	0,0102		

Разьмеры дадатных элемэнтаў мікрарэльефу

Табл. № 5.

ПЛЯТО

№№ грудоў	Форма	Велічыня паземнага пляцку			Даўжыня схілу				Даўжыня схілу				Абсалютная вышыня пляцку
					Ад краю пляцку да пачатку пахаванай глебы				Ад цэнтру пляцку да сярэдзіны западзіны				
		Даўжыня	Шырыня	Плошча	Пн.	Пд.	З.	У.	Пн.	Пд.	З.	У.	
I	Плято высокае з мілі—мікрарэльеф.	76	58	0,3710	40	50	48	—	70	102	86	—	190,2
II	Плято купалападобнае . . .	70	50	0.3474	36	20	30	14	78	52	106	42	190.0
III	Плято нізкае з зап. другой групы	90	60	0.4307	6	20	—	—	60	58	—	82	188,2
VI	Плято тэрасападобнае з мілімікрарэльефам	76	44	0.2733	24	—	30	30	76	—	70	76	189,0
	Сума . . .	312	212	1.4224	102	90	108	44	284	214	262	202	757,4
	Сярэдняе . .	78	53	0,3656	26	30	36	22	71	71	87	67	189.4

Сярэдняе 29   Сярэдняе 74

ГРЫВЫ

№№ грудоў	Форма	Арыентыроўка	Даўжыня грабня	Даўжыня схілаў								Абсалютная вышыня грабня
				Да пачатку пахаванай глебы				Да цэнтру западзін				
				Пн.	Пд.	З.	У.	Пн.	Пд.	З.	У.	
V	Грыва між 2-х буйных западзін	Пн.-Пд.	90	—	—	24	20	—	—	51	42	188,8
VI	Грыва між 2-х западзін на У і з на З. . . .	ПнЗ.-ПдУ.	160	—	—	120	24	—	—	30	74	189,4
						48	34	—	—	60	42	
VII	Грыва ахоплівае падковою западзіну № II з УПн. і З.	Пн.-Пд.	90	—	—	20	16	—	—	36	26	189,2
		З.-У.	60	52	20	—	—	86	40	—	—	189,0
		ПнЗ.-ПдУ.	66	48	12	—	—	72	32	—	—	188,8
	Сума		466	100	32	112	94	158	72	178	184	1154,6
	Сярэдняе . .		932	50	16	28	24	79	36	44	46	189,1

Сарэдняе 29.   Сярэдняе 51.

КУПАЛЫ

№№ грудоў	Форма	Даўжыня схілу								Абсалютная вышыня купалу
		Да пачатку западзіны				Да цэнтру западзіны				
		Пн.	Пд.	З.	У.	Пн.	Пд.	З.	У.	
VIII	Купал (заходняя $^{1}/_{2}$ па за вучасткам) . . .	48	52	—	40	62	76	—	52	189,4
IX	Купал (правільнай формы)	34	54	34	28	60	76	54	42	189,0
X	Купал (усходняя $^{1}/_{2}$ па за вучасткам)	—	—	36	—	—	—	52	—	189.0
	Сума	82	106	70	68	122	152	106	94	567,4
	Сярэдняе . . .	41	53	35	34	61	76	53	47	189,14

Сярэдняе 41   Сярэдняе 60

Даўжыня схілаў (сярэдняе для плято, грыў і купалаў)

Табл. № 6.

Экспазыцыя схілу	Даўжыня схілу				Абсалютная вышыня	Розьніца ў даўжыні схілаў розных экспазыцыі	Розьніца ў даўжыні	Памылка розьніцы	Стасунак эфэкту да памылкі
	Да пачатку западзін		Да цэнтру западзін						
	Сярэдняе	Памылка ±	Сярэдняе	Памылка ±					
Пн.	35,6	5,4	71,2	3,3	189,18 ± 0,15 м.	Паўночн. і паўдзён.	8,6	9,8	0,9 : 1
Пд.	32,6	7,4	62,6	9,3		Заходн. і ўсходн.	7,2	7,9	0,9 : 1
З.	32,2	3,4	60,6	7,9		Паўночн. і ўсходн.	17,8	3,2	5,2 : 1
У.	25,8	3,0	53,4	6,6		Паўночн. і заходн.	10,6	8,5	1,2 : 1
Сярэдняе	31,6	2,3	61,6	3,8					

Стромкасьць мікрасхілаў (схілы да цэнтру западзін)

Форма грудоў	№№ грудоў	Пн.	Пд.	З.	У.	Сума	Сярэдняе	Сярэдняе для ўсіх	Даўжыня схілаў
Плято	I	1°29′	1°40′	1°29′	—	4°38′	1°33′	1°32′	74,0
	II	1°53′	1°46′	1°44′	1°53′	7°16′	1°49′		
	III	1°10′	1°35′	—	—	2°45′	1°22′		
	IV	—	—	0°50′	1°22′	2°12′	1°06′		
Грывы	V	—	—	2°12′	2°10′	4°22′	2°11′	1°44′	49,4
	VI	1°45′	—	1°22′	1°38′	4°45′	1°32′		
	VII	1°37′	1°27′ 1°24′	1°54′	—	6°25′	1°36′		
Купалы	VIII	—	1°49′	2°07′	2°12′	4°01′	2°01′	1°55′	59,6
	IX	2°07′	1°49′	2°07′	1°23′	7°26′	1°51′		
	X	—	—	1°59′	—	1°59′	1°59′		
Сума . .		10°01′	11°43′	13°37′	10°38′	45°49′	—	—	—
		1°42′	1°39′	1°42′	1°46′	—	1°42′	—	—

Тэарэтычныя меркаваньні аб тым, што паўночныя схілы, якія найменш падлягаюць уплыву інсаляцыі сонца, павінны менш размывацца і быць, значыцца, самымі доўгімі і спадзістымі, а паўднёвыя, як іх антыподы—больш стромкімі і кароткімі, не апраўдваюцца з задавальняючай пэўнасьцю. Тое-ж і для заходніх і ўсходніх схілаў. Трэба сказаць, што экспазыцыя не адбіваецца на даўжыні і стромкасьці схілаў пры ўмовах Стэб. дасьл. поля; мусіць працэс змываньня і нівэліраваньня не пасьпеў яшчэ прыкметна выявіцца ў сэнсе рознай інтэнсыўнасьці на схілах рознай экспазыцыі. Адносна большая даўжыня паўднёвых і паўночных схілаў тлумачыцца тым, што ўсе элемэнты выцягнуты з поўначы на поўдзень.

Гэткім чынам западзінны мікрарэльеф лёэсавых плято характарызуецца прысутнасьцю купаляў і грыў, схілы якіх плынна апускаюцца да дна западзін і затым таксама плынна ўздымаюцца амаль што на тую-ж вышыню, затым ізноў апускаюцца ў наступную западзіну. Разьмер кожнай „хвалі“ 61,6 × 2 = 123,6 ± 7,6 м.; вышыня 189,18—187,34 = 1,84 м. ± 0,35 м., спад = 0,0297 (1°42′). На 13,7 гэктару плошчы Стэб. дасьл. поля ёсьць 10 мікравадападзелаў, 11 буйных западзін (1-й групы) і 5 западзін маленькіх (2-й групы) і цэлая сетка лагчынак, мілімікразападзінак і ўцісканьняў, прыстасаваныя галоўным чынам да вадападзельных плято.

Разьмеркаваньне глебавых тыпаў паводле элемэнтаў мікрарэльефу паказана ў табліцы 7-й (глядзі стар. 210).

У табліцы паказана дэталізацыя глеб, якая крыху адхіляецца ад чыста рэльефных азнак, дзеля таго што стасунак элемэнтаў рэльефу вельмі просты і быў ужо раней паказан—15,8% больш-менш паземных пляцкоў і 84,2% западзін „у шырокім сэнсе слова“. Але-ж калі 15,8% пад пляцкамі занята моцна падзолавымі глебамі з нармальным падзолавым паземам, дык плошча пад западзінамі занята цэлым шэрагам глебавых тыпаў.

Перш за ўсё выяўляюцца верхнія часткі схілаў к западзінам і вузкія грывы, змытыя аж да буравата-чырвонага пазёму B_2; гэтакіх „лысін“—29,3%. Затым—паземныя, моцна забалочаныя днішчы западзін заняты падзолава-балотавымі глебамі з намытым верхам, да 50 см. грубіні,—іх 4,2%. Днішчы шырока вакол агорнуты таксама падзолава-балотавымі глебамі, але менш забалочанымі і з меншаю грубінёю намытага пласту (да 30 см.)—іх 24%. Яшчэ вышэй ляжыць колца, часам разарванае, моцна падзолавых глеб; працэс змыву і намыву ў іх трымаецца рухомай роўнавай, чаму пабудова іх амаль ува ўсім падобна да нармальных глеб паземных пляцкоў (на карце яны ня вызначаны),—іх 24,7%. На дробныя западзіны другой групы прыпадае 0,8% ўсяе плошчы; пабудова іх ува ўсім падобна да глеб буйных западзін.

Сумуючы аднайменныя глебы паводле разьмяшчэньня іх на розных элемэнтах мікрарэльефу будзем мець гэткі стасунак:

1. Глеб са змытым верхам (моцна падзолавых)—29,3%.
2. „ з нармальным „ „ „ —40,5 „
3. „ „ наносным „ (падзолава-балотавых) – 30,2 „

Перад намі тыповы малюнак комплексу; няма ні воднага пераважаючага тыпу, ўсе кампанэнты выяўлены моцна.

Апісаны тып мікрарэльефу характэрны для моцных тоўшчаў лёэсу ў 10 і больш мэтраў; з памяншэньнем тоўшчы лёэсу зьмяншаецца велічыня западзін, форма іх робіцца расплыўнаю, нявыразнаю.

Свайго поўнага выяўленьня мікрарэльеф дасягае на плято ці тэрасападобных схілах; больш стромкія макрасхілы зусім ня маюць западзін, што тлумачыцца памяншэньнем тоўшчы лёэсу, а з другога боку—шпаркім

Табл. № 7.

Суадносіны глебавых тыпаў паводле мікрарэльефу.

№№ па парадку	Элемэнты мікрарэльефу	Глебавы тып	Плошча ў гэкт.	%% ад усяе плошчы	Сума
1	Вузкія грывы і верхнія часткі схілаў . .	Моцна падзолавая са змытым падзолавым пазёмам	4,0166	29,3	29,3%
2	Паземныя плацкі і спадзістыя схілы мікравадападзелаў плято	Моцна падзолавая з нармальным падзолавым пазёмам	2,1618	15,8	40,5%
3	Ніжнія часткі схілаў	Той-самы (№ 2)	3,3912	24,7	
4	Пэрыферыя буйных западзін па пахаванай глебе	Падзолава—балотавая з намыўным верхам, слаба забалочаная	3,2802	24,0	30,2%
5	Дробныя западзіны II гр.	Той-самы (№ 4)	0,1121	0,8	
6	Западзіны часткаю ў вучастку, часткаю па-за вучасткам	Той-самы (№ 4)	0,1665	1,2	
7	Днішчы буйны западзін	Той-самы, што і № 4, але больш намыт. і больш забалочан	0,5794	4,2	
		УСЯГО	13,7078	100	

цёкам атмасфэрных ападкаў па лагчынах (якія зьмяняюцца з часам на равы).

Незалежна ад спосабу стварэньня лёэсу (воднага, эолавага і інш.) усе згодны, што матар'ялам для яго стварэньня былі ледавіковыя адклады марэны. Ледавік па сваім шляху „узараў" і перамалоў на парашок аграмадныя колькасьці пластовых парод, галоўным чынам вапнякоў, чаму марэны амаль заўсёды карбанатны. Пры стварэньаі лёэсаў гэтыя карбанаты ўвайшлі ў склад апошніх, дзеля чаго прысутнасьць свабодных карбанатаў лічыцца аднэю з характарных асабліваняцяй лёэсу, як пароды.

У далейшым карбанаты вымываліся з верхніх пластоў лёэсу атмасфэрнымі водамі на тую ці іншую глыбіню ў залежнасьці ад умоў клімату і рэльефу мясьцовасьці. Чым клімат сушэй і кантынэнтальней, тым вышэй ляжыць пазём ускіпаньня, чаму глыбіня пакладу карбанатаў паступова зьмяншаецца з поўначы і паўночнага захаду на поўдзень і паўднёвы-ўсход (гл. профіль № 11).

Лёс выпадаючых ападкаў траякі: адна частка выпарваецца назад у атмасфэру, другая сьцякае ў западзіны, лагчыны, равы, рэкі і інш., трэцяя пранікае ў глебу на тую ці іншую глыбіню, у залежнасьці ад колькасьці вады, ўласьцівасьцяй глебы і г. д., нясучы разам з сабою карбанаты і іншыя солі. Значыцца, верхавінкі купаляў і грэбяні грыў, з якіх сьцякае больш вады па паверхні, павінны ўскіпаць вышэй роўных пляцкоў. Верхнія часткі схілаў хоць таксама губляюць шмат вады сьцёкам, але частка яе пасьпее прасачыцца ў зямлю, і значыцца ўскіпаць павінны ніжэй грыў і купаляў. Па ніжніх частках схілаў цячэ яшчэ больш вады зьверху, чаму ўскіпаньне павінна быць больш нізкім. Дробныя лагчынкі, зьяўляючыся ложам сьцякаючых вод, атрымоўваюць больш вады і павінны ўскіпаць глыбей.. Нарэшцо западзіны, апроч вады непасрэдна з атмасфэры, атрымоўваюць яшчэ і сьцякаючую з усяе плошчы вадазбору; у іх яна пасьля вялікіх дажджоў ці сьнегапуску доўга стаіць, паволі прасякаючы ў глыбіню; значыцца глебы западзін, тэарэтычна, павінны ўскіпаць найбольш глыбока.

Наколькі гэтыя тэарэтычныя меркаваньні адпавядаюць супраўднасьці, будзе відаць з наступнага разьдзелу, прысьвечанага пытаньню ўплыву мікрарэльефу на глыбіню пакладу карбанатнага пазёму.

У ліпені 1924 году на Стэб. дасьл. полі было зроблена каля 100 азначэньняў глыбіні ўскіпаньня, прычым ува ўсіх выпадках ад $2^{0}/_{0}$ HCl было бурнае выразна прыкметнае ўскіпаньне. Вынятак спроб рабіўся жалонкавым сьвердлам; глыбіня шчылін хісталася ад 118 да 400 см.; пабудова і тып глебы амаль для кожнай шчыліны вызначаліся невялічкаю ямаю да пачатку ілювіяльнага пазёму B_2 (70—100 см.); ямы замалёўваліся фарбоўнымі алаўкамі.

Апроч таго скарыстаны матар'ял, за сабраны 1921—22 г.г. глебазнаўчым аддзелам Горацкай с.-г. дасьл. станцыі, а ўласьне: 1) глебавая карта Стэб. дасьл. поля,—маштаб 10 саж. у цалі; 2) каля 20 ям глыбінёю 2—6 мэтраў, разьмешчаных часткаю на Стэб. дасьл. полі часткаю на суседніх палёх, і 3) каля 15 глыбокіх (10—15 м.) сьвідравальных шчылін праз усю тоўшчу лёэсу да марэны, разьмешчаных па розных элемэнтах мікрарэльефу. Аднак, з мэтаю аднастайнасьці матар'ялу апрацоўцы будзе падлягаць толькі матар'ял, сабраны спэцыяльна для данай працы.

Вялікае значэньне мае сама тэхніка сьвідраваньня, дзеля таго што ад яе залежыць дакладнасьць азначэньня глыбіні ўскіпаньня, а значыцца і пэўнасьць вывадаў. Пры дыямэтры жалонкі сьвердла каля 4 см. адпор глебы аказаўся значным, дзеля чаго працу сьвідраваньня прышлося рабіць удваіх. Сьвердзел заганяўся ў глебу адразу на 15—50 см., пасьля чаго круціць станавілася цяжка і яго выймалі для ачысткі жалонкі. Здавалася-б, што азначэньне глыбіні ўскіпаньня сьвердлам рэч досыць клапотная, вымагаючая вялікай уважнасьці, дзеля таго што лёгка „перасьвердліць“, г. з. прайсьці сьвердлам глыбей пачатку ўскіпаньня. Праўда, у жалонцы сьвердла лёгка адшукаць край ўскіпаньня, спрабуючы розныя вучасткі HCl, але прамер ад значка на штанзе ў паверхні глебы, які ставіцца крэйдаю перад выйманьнем сьвердла, да гэтага краю ня ёсьць сапраўдная глыбіня ўскіпаньня, затым што ў жалонцы матар‘ял прасуецца ў 2—3 разы ў параўнаньні з грубінёю пройдзенага пласту. Значыцца‘ патрэбна дакладна азначаць глыбіню ўскіпаньня, што, як пабачым ніжэй, аказалася зусім магчымым.

Пры праходжаньні розных глебавых пазёмаў былі заўважаны вось якія асаблівасьці: зьверху да пазёму B_2 сьвердзел ідзе надта лёгка і хутка, але ў паземе B_2 (каля 40—50 см.) адпор яўна павялічваецца, сьвердзел прыходзіцца выймаць праз кожныя 15—20 см. Канец пазёму B_2 (каля 100—120 см.) і пачатак шырокіх артзандаў (псеўдафібры), г. з. пазём B_3 і далей пазём вузкіх струменчатых артзандаў—B_1 сьвердзел праходзіць лёгка і хутка (адразу па 50 см.). Пачатак ускіпаньня заўсёды адчуваўся па яўнаму павялічэньню адпору сьвердла, праўда, некалькі меншым, чым у пазёме B_2, але ўсе-ж больш адчуванаму для рук. Дзякуючы гэтаму ня прыходзілася выймаць сьвердзел праз кожныя 5—10 см. і яго канец ніколі не заходзіў глыбей як 5—7 см. у карбанаты пазём. Другою азнакаю блізкага ўскіпаньня было ссыпаньне матар‘ялу з канца сьвердла, што станавілася прыкметным за 20—30 см. перад ўскіпаньнем, і яўнае пасьвятленьне матар‘ялу. Пры зьяўленьні тых ці іншых азнак ускіпаньня на штанзе сьвердла ў паверхі глебы рабілася адзнака перад падняцьцем, прамер ад якой да канца сьвердла з ускіпаючым лёэсам і ёсьць глыбіня ўскіпаньня. Пры закладцы дзьвёх шчылін радам розьніца азначэньняў звычайна не перавышала 3—5 см, што пры сярэдней глыбіны ўскіпаньня 1,5—2 м. складае 2—3⁰/₀, дакладнасьць зусім здавальняючая, тым больш, што памылкі могуць быць толькі ў бок павялічэньня.

Сабраны матар‘ял апрацоўваўся абодвымі мэтадамі—графічным і статыстычным. Разгледзім перш статыстычны мэтад.

Вышэй было ўжо адзначана змываньне схілаў і заглейваньне западзін. У залежнасьці ад стромкасьці схілу, экспазыцыі і да т. п. змытымі аказаліся ці толькі A_1, ці яшчэ і A_2, а ў некаторых выпадках нават і B_1, так што ніжэй ворнага пазёму (20—22 см. грубіні) ляжыць ці падзолавы пазём A_2 (па плято, ніжэйшых частках схілаў і ў мілімікрапаніжэньнях), ці пазём B_1 і B_2 (верхнія часткі стромкіх схілаў, купалі, грывы), ці па пэрыфэрыі і днішчах западзін—дэлювіяльны пазём A^d і ніжэй захаваная глеба. Групуючы ўсе сьвідравыя шчыліны паводле прысутнасьці таго ці іншага глебавага пазёму непасрэдна пад ворным пластом, што можна зрабіць досыць дакладна, дзеля таго што пабудова глеб высьветлена ямамі, мы будзем мець гэткае разьмяшчэньне глыбіні ўскіпаньня (гл. табліцу № 8, на старонцы 213).

З табліцы відаць залежнасьць глыбіні ўскіпаньня ад ступені змываньня. Так, глебы, у якіх непасрэдна пад ворным пластом (20 см. грубіні) ляжыць пазём B_2, ускіпае ў сярэднім на 175 ± 4 см. Гэтыя мясьціны добра прыкметны зьверху, дзякуючы свайму буравата-чырвонаму колеру. Асабліва яўна віднеліся змытыя]„лысіны“ пры замярзаньні ўзоранай глебы, пры поўнай адсутнасьці расьліннасьці ў бяссьнежную зіму 1924—25 г. Аказваецца, што змываньне схілаў ідзе ня суцэльнаю паласою, а асоб-

Глыбіні ўскіпаньня па глебавых тыпах

Табл. № 8.

	Ніжэй ворнага пазём B_2		Ніжэй ворнага пазём B_1		Ніжэй ворнага пазём A_2.		Ніжэй ворнага пахаван A_0	
	№№ шчылін	Глыбіня ўскіп ў см.	№№ шчылін	Глыбіня ўскіп ў см.	№№ шчылін	Глыбіня ўскіп ў см.	№№ шчылін	Глыбіня ўскіп ў см.
	6	190	2	234	1	250	5	275
	7	160	3	261	9	194	10	312
	14	180	8	185	12	245	11	—
	16	118	13	190	18	240	15	270
	19	158	25	205	20	218	17	—
	21	185	32	210	29	180	22	—
	27	177	55	225	30	300	23	230
	31	184	63	200	33	245	24	305
	35	190	65	214	36	212	26	360
	49	170	67	240	37	220	28	328
	50	153	67_1	235	41	295	34	—
	51	200	67_2	215	42	312	38	—
	51_1	167	68	200	44	280	39	286
	51_2	170	73	210	45	260	40	—
	54	180	78	208	46	260	43	—
	60	190	79	240	47	210	53	—
	66	197	81	226	48	280	57	380
	70	170			56	282	62	338
	74	180			52	244	69	350
					58	215	71	380
					59	218	76	215
					64	345	77	330
					72	215	82	—
					75	235	83	—
					80	247	84	—
					85	265	88	—
					86	272		
					87	260		
Сума	19	3319	17	3698	28	6999	26(14)	4359
Сярэдняе . .	—	175	—	218	—	250	з 14	311
Памылка сярэдняг ± а	—	4	—	—	—	7	—	14

Сярэдняе для $B_2+B_1=195\pm5$ см.

ными плямамі круглай ці часьцей выцягнутай папярок схілу формы, разьмешчанымі як на верхніх, таксама і на ніжніх частках мікрасхілаў. Змытыя вучасткі схілаў падзелены вузкімі лагчынамі бяз бурай водцені, якія сплятаюцца ў складаную сетку, злучаную з сярэдзінаю западзіны.

Глебы з уцалеўшым пазёмам B_1 (А-В) бурага колеру з плямамі падзолу ўскіпаюць з 218 см. На глебавай карце абедзьве гэтыя адмены злучаны разам (хоць правільней было-б іх разьдзяляць), чаму для іх была вызначана сярэдняя глыбіня ўскіпаньня—195±5 см. Падзолавыя глебы з пазёмам A_2 (падзолавым) пад ворным ускіпаюць з 250±7 см. Глебы з намыўным верхам (падзолава—балотавыя) ускіпаюць толькі на ўздымах, днішчы западзін і ніжэйшая частка схілаў зусім ня ўскіпаюць да самай марэны (10-12 м.), што было высьветлена глыбокімі шчылінамі 1921-22 г.г. для вывучэньня вільготнасьці лёэсавай тоўшчы. Для глеб з намыўным верхам, дзе сярэднее з 14 азначэньняў ускіпаньне было 311±14 см., калі адкінуць пласт глебы да пазёму B_2 будзем мець гэткія глыбіні ўскіпаньня:

1) Змытыя да B_2—175-20 см. (глыбіня ворнага пласту) . . 155 см.
2) „ „ B_1—218-38 „ (сярэднее з 17 ям) . . . . 180 „
3) Нармальныя —250-41 „ („ 9 „) . . . . 209 „
4) Намыўныя —311-62 „ („ 15 „) . . . . 248 „

Значыцца, высокае ўскіпаньне змытых глеб залежыць ня толькі ад набліжэньня пры змываньні карбанатнага пазёму к паверхні, але яны наогул прамыты атмасфэрнаю вадою на меншую глыбіню, чым глебы нармальныя і тым больш глебы з намыўным верхам.

Уплыў розных элемэнтаў мікрарэльефу на глыбіню ўскіпаньня не залежна ад глебавых тыпаў паказан ў табліцы № 9 (глядзі стар. 215).

Паданыя вышэй тэарэтычныя меркаваньні аб залежнасьці глыбіні ўскіпаньня ад колькасьці прасякшай уніз вады цалком сьцьвярджаюцца вывадамі сярэдніх велічынь. Верхавінкі купаляў і грэбяні грыў ускіпаюць ня толькі вышэй іншых элемэнтаў, але глыбіні ўскіпаньня ў іх супадаюць: грывы з 179,4±12 см., купалі з 174,2±6 см., агульная глыбіня ўскіпаньня 177,5 см. з хістаньнем 118-218 см. Больш-менш паземныя пляцкі ўскіпаюць ужо з 246,1±7,6 см.; верхнія $^1/_3$ схілаў па ўмовах сьцёку набліжаюцца да грыў і купаля ўскіпаюць з 184,6±5 см.; сярэдзіна схілу з 212,6±14 см.; ніжняя $^1/_3$ схілу толькі з 298,9±15 см. Западзіны нават невялікія (другая група) вымыты на ўсю тоўшчу лёэсу. Невялічкія лагчынкі схілаў і мілімікрарэльефныя падзінкі ўскіпаюць з 270,2±14 см., тады як роўныя мясьціны побач ускіпаюць з 200-240 см.

Графічны мэтад, г. з. разгляданьне канкрэтных профіляў па мікрарэльефу Стэб. дасьл. поля, дасьць магчымасьць дэталізаваць уплыў разнастайных, больш-менш памысных умоў фільтрацыі на глыбіню пакладу карбанатнага пазёму.

Профіль № 1 ідзе з поўначы на поўдзень (лінія АВ) праз тры буйных западзіны № VI, IV і II, разьдзеленых купалям № 9 і грываю № 2/IX. Усе тры западзіны пазбаўлены карбанатаў да пачатку марэны (12 м.). Вышэй па схілах ускіпаньне стромка ўздымаецца ўгару, дасягае на самых стромкіх перагібах максімуму і зноў апускаецца ў суседнія западзіны. На самай верхавіне купалю № 9 ўскіпаньне рэзка панізілася да 275 см., замест чаканых 180-190 см. Закладзеная ў гэтым месцы яма паказала, што тут адбыўся раскол усяе тоўшчы лёэсу ў кірунку з захаду на ўсход, роўналежна суседнім западзінам. Шырыня шчыліны 20-45 см., глыбіня дагледжана да 280 см., дзе шчыліна дасягнула 45 см. ушыркі і йшла яшчэ

	Плято			Купалы грывы			Верхняя з схілаў			Сярэдзіна схілаў			Ніжняя 1/3 схілаў			Западзіны			Мілімікра-западзіны		
	№№ шчылін	Глебавы пазём	Ускіпаньне	№№ шчылін	Глебавы пазём	Ускіпаньне	№№ шчылін	Глебавы пазём	Ускіпаньне	№№ шчылін	Глебавы пазём	Ускіпаньне	№№ шчылін	Глебавы пазём	Ускіпаньне	№№ шчылін	Глебавы пазём	Ускіпаньне	№№ шчылін	Глебавы пазём	Ускіпаньне
	1	A_2	250	Купалы			8	B_1	185	2	B_1	234	10	A_0	312	4	A_0	—	23	A_0	230
	20	A_2	218	6	R_2	190	13	„	190	3	„	261	15	„	270	11	„	—	24	„	305
	32	B_1	210	7	B_2	160	21	B_2	185	9	A_2	194	18	A_2	240	17	„	—	30	A_2	300
	33	A_2	245	24	B_2	177	31	„	184	14	B_2	180	26	A_0	360	22	„	—	64	„	345
	36	A_2	212	49	B_2	170	50	„	153	51	„	200	28	„	328	34	„	—	72	„	215
	37	A_2	220	4	—	697	54	„	180	51_1	„	167	39	„	286	38	„	—	76	A_0	215
	42	A_2	312	Сярэдняе		174	60	„	190	51_2	„	170	41	A_2	295	40	„	—	77	„	330
	44	A_2	280	Памылка ±		6	65	B_1	214	55	B_1	225	52	„	244	43	„	—	79	A_2	240
	45	A_2	260	Грывы			67_2	„	195	61	?	305	56	„	282	53	?	—	86	„	272
	46	A_2	260	16	B_2	118	70	B_2	170	67	B_1	190	68	B_1	200	57	A_0	—	5	A_0	275
	47	A_2	210	19	„	158							69	A_0	350	82	„	—	12	A_2	245
	48	A_2	280	25	„	205							71	„	380	83	„	—			
	58	A_2	215	35	„	190										84	„	—			
	59	A_2	218	66	„	197										88	„	—			
	63	B_1	200	75	B_1	208															
	75	A_2	235	74	B_2	180															
	80	A_2	247	7	—	1256															
	81	B_1	226	Сярэдняе		179															
	85	A_2	265	Памылка ±		12															
	87	A_2	260																		
Сума	20	—	4923	—	—	1953	10	—	1846	10	—	2126	12	—	3885	14	—	—	11	—	2972
Сярэдняе . . .	—	—	246	—	—	177	—	—	185	—	—	213	—	—	299	—	—	—	—	—	270
Памылка сяр- ±	—	—	7	—	—	—	—	—	5	—	—	14	—	—	15	—	—	—	—	—	14

глыбей. Цэнтральная частка шчыліны выкладзена лёэсавым матар'ялам бурavата-чырвонага колеру з безьліччу праснаводных чарапашак (Planorbis, Limnaea і інш.). Пачалася шчыліна ў пазёме B_2 шырокаю розьверцюлейкаю, у B_4 звузілася да 15 см., глыбей ізноў пашырылася. Над шчылінаю аказалася невялікая пляма (5-6 м. упярок) глеб, аналягічных глебам западзін. Ускіпаньне ў шчыліне пачалося з 230 см., дзе зьявіліся чарапашкі. Незачэплены пласт лёэсу ўскіпае зьлева з 275 см., справа з 245 см.; глебавыя пазёмы аказаліся таксама адпаведна ніжэй,—маем малюнак „скіду“ ўсяе левай часткі лёэсу, зьмешчанай у бок больш буйнай западзіны № VI. Аналягічная шчыліна была выяўлена на адным з мікравадападзелаў высокага плято фэрмскага поля; глыбіня яе была прасьледжана ямаю да 6 м. і ішла далей углыб. Ускіпаньне ў ёй панізілася ад 170 да 280 см. Зьверху таксама аказалася пляма захаваных глеб.

На грыве № 7 лінія профіля перасякае ўдаўжкі невялікую лагчынку, адну з цэлае сеткі „языкоў“, што паўзуць ад западзін па схілах; па іх галоўным чынам адбываецца сьцяканьне вады са схілаў у западзіны, што прычыніцца большаму прамываньню глебы і, значыцца, зьніжэньню глыбіні ўскіпаньня.

Профіль № 2 ідзе па схілу роўналежна западзіне № 1 і сячэ некалькі языкоў-лагчын у папярочным кірунку. Пабудова глебы схілу і зьмяненьне глыбіні ўскіпаньня вельмі характарны і не патрабуюць тлумачэньняў.

Профіль № 3 высьвятляе ўплыў на глыбіню ўскіпаньня невялікіх западзін другой групы і вельмі вузкіх грыў. Шчыліна № 16 зроблена на вельмі вузкай грыве змытых глеб (10 м. папярок); ускіпаньне ў ёй аказалося самым высокім на ўсім апісаным вучастку—118 см. і ляжыць у межах дасягненьня карнявой сыстэмы амаль усіх культурных расьлін. Маленькая западзінка ($<$ 20 см. углыбкі) паводле характару ўскіпаньня поўнасьцю адпавядае буйным западзінам.

Профіль № 4 зьмешчаны на плято з добра выяўленымі мілімікрарэльефнымі падзінкамі, часта мала прыкметнымі зьверху. Выгіны крывой ускіпаньня ў дзесяткі разоў мацней адбіваюць выгіны і ўціsканьні паверхні. Пры доўгім узорваньні падзінкі могуць зусім зьнівеліравацца і азначыць іх велічыню і месца можна толькі паводле зьмененай глыбіні ўскіпаньня. Таксама вузкія грывы могуць быць зруйнованы, як напр., грыва з шчылінаю № 19, дзе яна ня вызначаецца ўжо паземнікамі, аднак характарныя змытыя глебы і высокае ўскіпаньне (180 см.) паказваюць на грыву.

Профіль № 5 зьмешчаны на больш спакойным плято (№ III) з нармальнымі глебамі, якія ўскіпаюць з 260 см. Невялічкая западзінка (другой групы) № 3, вышчалачана зусім.

Профіль № 6 зьяўляецца не канкрэтным прыкладам, а некаторым абагульненьнем. У аснову яго пабудовы пакладзены сярэднія арытмэтычныя належных элементаў мікрарэльефу; крывыя ўскіпаньня пабудованы таксама на падставе сярэдніх вывадаў (гл. табліцу на старонцы 213). Характарна звужэньне калюмны ўскіпаючага лёэсу ад плято к купалям і грывам, што адпавядае, як было зазначана вышэй, ступені распрацоўкі мікрарэльефу.

Профіль № 7 узяты з ваколіц Горак (Іванова). Тоўшча лёэсавай накідкі зьмяншаецца к р. Проні і дасягае тут толькі 5-7 мэтраў, у зьвязку з чым мікрарэльеф выражаны значна слабей і неаформлены так ясна, як на Стэб. дасьл. полі. На профілі паказана самая буйная западзіна. Другая асаблівасьць профілю-гэта тое, што тут непасрэдна пад лёэсам ёсьць першы вельмі нясталы пазём грунтовых вод, што затрымоўвае прамываньне грунту атмасфэрнымі водамі. дзеля чаго глыбіня ўскіпаньня мікравадападзелаў значна вышэй—105-135 см., а западзіны вышчалачаны ня зусім і ўскіпаюць з 525 см.

Профілі № 8 і 9 выяўляюць мікрарэльеф і глыбіні ўскіпаньня глеб паўпустыні (поўдзень Саратаўскай губ.). Профілі складзены паводле матар'ялаў Н. А. Дзімо [1]). Характар ускіпаньня больш-менш захаваўся: пукатыя элемэнты ўскіпаюць вышэй, угнутыя ніжэй, затое рэзка зьмяніліся вялічыні сустаўных элемэнтаў, раўнуючы са Стэб. дасьл. полем.

Профіль № 10. Тут паказаны чатыры схілы рознай экспазыцыі, прыблізна аднае даўжыні і стромкасьці, для высьвятленьня ўплыву экспазыцыі на глыбіню ўскіпаньня. Найбольшага разыходжаньня крывыя дасягаюць на сярэдзіне схілаў, прычым найбольш высока ўскіпаюць паўночныя схілы — 185 см., потым Пд.-ПдУ—230 см., У—285 см. і З—ПдЗ—385 см. Магчыма, што тут запрычыніўся уплыў больш павольнага адмярзаньня паўн. схілаў вясною, так што частка сьнегавой вады пасьпела зьбегці ў западзіны яшчэ па мёрзлай зямлі.

Профіль № 11 паказвае глыбіні ўскіпаньня розных глебавых тыпаў у плякорных умовах на лёэсах. Пазём вечнай мерзлаты і тундравых глеб перашкаджае вымываньню карбанатаў у глыб, чаму гэтыя глебы ўскіпаюць параўнальна ня глыбока.

Што-ж за прычыны стварэньня і які далейшы лёс мікрарэльефу?

Ёсьць некалькі тэорый пахаджэньня западзін, галоўнейшыя з іх наступныя:

1) тэорыя правалаў ці асяданьня грунту (суфцыя) пры вымываньні пячор у ніжэйляжачых лёгкарастварымых пародах — вапнякох, крэйдзе і і інш. (Паўлаў, Козьменка, Бэрг),

2) тэорыя выдуваньня ветрам (Туткоўскі, Набокіх),

3) тэорыя прасьвечваньня першапачатковага марэнавага рэльефу (Бэрг),

4) тэорыя паступовага асяданьня пры вымываньні соляй, якія былі раней у самым грунце (Касовіч, Ф. П. Саварэнскі, Афанасьеў, Мажароўскі).

Гэалягічная пабудова парод і значная грубіня лёэсу Стэб. дасьл. поля прымушае застанавіцца на гэтай апошняй тэорыі. Колькасьць карбанатаў у лёэсе досыць значная: паводле Мушкетава ад 6 да 67%, Саварэнскі для Насоўскага дасьл. поля паказвае лічбу 10,2 % $CaCO_3$, як сярэднюю з 9 ям. Лёэс Стэб. дасьл. поля на глыбіні 410 см. мае (аналіз лябараторыі аграхэміі) 11,13% $CaCO_3$. Пры выдаленьні адных толькі карбанатаў з 12 мэтравай тоўшчы лёэсу можа стварыцца зьніжэньне ў 12 × 11,13% = 1,33 м, ці каля 135 см. У сапраўднасьці сярэдняя глыбіня западзін роўна 168 см. (старонка 204), г. з. крыху больш; лішак з посьпехам можна аднесьці за кошт вымываньня з лёэсу іншых злучэньняў (напр., пераход вокіснага Fe ў закіснае) і тых „першапачатковых няроўнасьцяй“ Саварэнскага [2]), якія з прычыны значнага ўвільгатненьня зьявіліся пачаткамі сучасных западзін.

Прысутнасьць у грунтовых водах карбанатаў паказвае на тое, што ўсё яшчэ ідзе вымываньне іх з павярхоўных парод, а значыцца, пры адпаведных умовах рост западзін можа быць яшчэ і цяпер. З другога боку, пры разворваньні западзіны інтэнсыўна заглейваюцца, мікрарэльеф

---

[1]) Димо Н. А. и Келлер Б. Н. „Из области полупустыни“ 1907 г.

[2]) Саваренский Ф. П. „Почвенный покров Носовского оп. поля“ Киев 1924 г. і інш.

згладжваецца ці зьмяняецца на сетку равоў. Адсюль два кірункі далейшага разьвіцьця рэльефу: першы — невеліраваньне паверхні, зьмяненьне на раўніну, другі кірунак—шпаркі рост равоў, глытаючых адну западзіну за другою, у выніку чаго лёэсавае плято перарэзваецца часам сапраўды вялізнаю сеткаю равоў, прычым гіне значны $^0/_0$ культурнай плошчы, утвараюцца перашкоды для вырабу глебы, для зносін і г. д.

Для Стэб. дасьл. поля можна чакаць, што з часам западзіны увойдуць у сыстэму равоў, якія ўжо і цяпер досыць значна парэзалі акраіны данага лёэсавага плято.

Яшчэ Дакучаевым 1) была адзначана важная роля западзін на цалінным стэпэ, як натуральных хавальнікаў вады і рэгулятараў вільготнасьці, але ўжо па Чаррігаўскай губ. для ворных раёнаў праф. Афанасьеў дае адмоўную ацэнку ролі западзін. Забалочваньне днішч западзін вядзе да страты культурнай плошчы, а працэс змываньня са схілаў верхняга найбольш каштоўнага пласту чарназёму пагаршае якасьць глеб вакол западзін.

Забалочваньне днішч западзін падзолавай зоны робіць іх тым больш нягоднымі, таму што яны ці заняты асакою і іншымі вадалюбамі, ці па іх сыстэматычна адбываецца вымаканьне пасеваў вясною і ў восень, асабліва азімых. Змываньне-ж верхніх пластоў падзолавых глеб аж да пазёму B_2 не зьяўляецца тут такім абсалютным ліхам, як у зоне чарназёмаў. Агранамічная практыка даўно адмоўна ацаніла ўплыў падзолавага пазёму; досьледы Даярэнка наглядна паказалі, наколькі пагаршаецца вадапраніклівасьць і аэрацыя падзолавага пазёму пры разбурваньні натуральнага складу, ад чаго нельга ўхіліцца пры больш-менш глыбокім узорваньні. Дзеля гэтага выдаленьне падзолавага пазёму пры змываньні зьяўляецца дадатнасьцю, якая можа кампэнсаваць трату нязначнай колькасьці гумусу змытага пазёму A_1.

Добрае дрэніраваньне мікрасхілаў са змытымі глебамі, добрая іх аэрацыя, таксама зьяўляецца важным агранамічным плюсам. Выробляючы непасрэдна ілювіяльны пазём B_1, узбагачаны аснаваньнямі, узмацняючы ў ім працэс выветрываньня, мы на такой „скалечанай“ глебе можам мець досыць пажыўной матэрыі для добрага ўраджаю. Правільны севазварот разам з угнаеньнем можа запрычыніцца намнажэньню перагною, і тады гэтыя змытыя глебы з усіх бакоў будуць значна лепшымі за нармальных глеб з уцалеўшым падзолавым пазёмам.

Мною была зроблена спроба праверыць гэтыя меркаваньні канкрэтнымі данымі ўраджайнасьці глеб Стэб. дасьл. поля, для чаго былі скарыстаны матар'ялы катэдры агульнага земляробства па ўраджайнасьці зімовага жыта ў 1924 г. Умовы росту жыта — халоднае і дажджыстае лета з ліўнямі. Уплыў севазваротаў яшчэ ня мог выявіцца, дзеля таго што пасьля спробнай сяўбы аўсу ўгнаеньне (гной) ўсюды клалася адзін раз. Плошча падлікавай дзялянкі $10 \times 12 = 120$ кв. м.; усяго скарыстана 47 дзялянак. Сырая маса ўраджаю з дзялянкі важылася, $^0/_0{}^0/_0$ зерня, вільгаці і сьмяцьцін знаходзіліся па спробнаму снопу. У табл. № 10 паказан ураджай у пудох з дзесяціны (глядзі стар. 219).

Як відаць з табліцы, найбольш ураджайнымі аказаліся падзолава-балотавыя глебы пэрыфэрыі западзін з намыўным верхам. За імі ідуць моцна-падзолавыя глебы са змытым верхам, далей нармальныя глебы плято і ніжніх частак схілаў. Днішчы буйных западзін (№ VI) з вялікаю вадазборнаю плошчаю значна вымакаюць вясною і ў восень, чаму ураджай з іх мізэрны.

---

1) Докучае В. В. „Наши степи прежде и теперь“ 1892 г.

Ураджайнасьць па глебавых тыпах зімовага жыта (у кілёграмах на гэктар).

Табл. № 10.

Папары	Глебы	Ураджай паветрана сухой масы (з + с)		Ураджай зерня		% зерня ад усяе масы (з + с)		% сарнякоў	
		Сярэдн.	Памыл. ±	Сярэдн.	Памыл. ±	Сярэдн.	Памыл. ±	Сярэдн.	Памыл. ±
Гнойны	Намыўныя . . .	4707	387	1578	198	33,4	0,9	9,0	5,9
	Змытыя	4029	243	1401	112	33,9	0,7	6,7	3,1
	Нармальныя . .	4167	129	1425	43	34,3	0,9	6,6	1,4
Вікавы	Намыўныя . . .	4149	105	1494	88	35,0	0,8	3,5	1,1
	Змытыя	3996	141	1524	49	37,5	0,6	2,7	0,4
	Нармальныя .	3726	369	1255	172	34,1	0,8	6,6	2,2
	Дніщчы западзін .	(603)	—	(174)	—	(29,1)	—	(12,0)	—
Канюшынны	Намыўныя . . .	3318	333	1032	31	30,3	1,8	12,0	4,3
	Змытыя	3501	225	1144	84	33,0	1,8	8,4	2,4
	Нармальныя . .	3195	33	882	249	27,5	3,5	15,3	1,9
Прэсны	Змытыя	(3057)	(165)	(1078)	(66)	(35,3)	(0,6)	(3,7)	(0,7)
Сярэдняе	Сярэдняе для ўсіх глебавых адмен (дніщчы выключаны)	4300	—	1468	—	33,9	—	7,4	—
		3942	—	1425	—	35,5	—	4,3	—
		3342	—	1020	—	30,3	—	11,9	—
		(3057)	—	(1078)	—	(35,3)	—	(3,7)	—
		3861	—	1306	—	33,2	—	7,8	—
Сярэдняе для ўсіх папараў (прэсны выключан)	Намыўныя . . .	4057	174	1368	73	32,9	0,7	8,0	2,5
	Змытыя	3843	120	1356	46	34,8	0,7	5,9	1,3
	Нармальныя . .	3679	130	1188	102	32,0	1,2	9,5	1,1
	Дніщчы западзін .	(603)	—	(174)	—	(29,1)	—	(12,0)	—

Гной падвышае ўраджай нармальных і намыўных глеб у большай ступені, чым змытых; як відаць, тут адбіваецца, апроч павялічэньня пажыўной матэрыі, памяншэньне фізыкі глебы. Процант зерня найбольш высокім быў для змытых глеб—34,8%, потым ідуць намыўныя — 32,9%, нармальныя — 32,0% і днішчы западзін — 29,1%. Нарэшце, па засьмечанасьці нармальныя глебы апынуліся таксама на апошнім месцы; папар з гноем таксама зрабіў на іх лепшы ўплыў.

Адсюль вынікае адзін вывад: нельга ставіць адзін досьлед на розных глебавых тыпах; так, калі-б мы вывучалі, напрыклад, уплыў гною, дык падлікавыя дзялянкі на нармальных глебах дадуць большы эфэкт, чым тыя-ж дзялянкі з большаю колькасьцю гною, але зьмешчаныя на змытых глебах; пры аднакавых дозах рэзультаты будуць непараўнальна розныя.

Даная тэма была прапанована прафэсарам Я. М. Афанасьевым і зроблена пры катэдры глебазнаўства Горацкага С.-Г. Інстытуту пад яго кіраваньнем у 1924—25 г. г.

А. Г. Мядзьведзеў.

Das Mikrorelief von Lössplateaus und sein Einfluss auf die Tiefe der Ablagerung des Karbonathorizontes.

Zusammenfassung.

1. Die Grösse der Elemente eines Mikroreliefs stehen in eingem Zusammenhange mit der Mächtigkeit der Lössablagerung ihrer Tiefe nach, je stärker letztere ist, um so grösser und tiefer sind die Einsenkungen.

2. Einen deutlichen Ausdruck erreicht ein Mikrorelief auf Lössebenen der Wasserscheiden, steilen Abhängen fehlen sie vollständig.

3. Das Mikrorelief des Stebutschen Versuchsfeldes kann zu dem Typus eines Relief mit stark entwickelter Einsenkungsbildung gerechnet werden, die Anzahl der unversehrt gebliebenen kleinen Horizontalflächen beträgt im Ganzen nur 15,8% der Gesammtfläche, Einsenkungen im weiteren Sinne dieses Wortes nehmen die übrigen 84,2% fürsich in Anspruch.

4. Der mittlere Umfang der Einsenkungen beträgt 120×88M, ihre Tiefe 168 sm., auf ein Hektar entfallen 0,9 Einsenkungen.

5. Eine Exposition, im Sinne einer Veränderung der Länge und Steilheit der Hänge auf dem Stebutschen Versuchsfelde macht sich nicht sonderlich bemerkbar.

6. Die oberen Teile der Mikrohänge weisen Spuren von Abwaschung des Bodens auf. Die Einsenkungen sind in ihren unteren Teilen verschlammt, daher wird im weiteren Verlauf unter der Bezeichnung „verschlammt“ entweder dieser niedrigste versumpfte Teil überschwemmter Böden zu verstehen sein, oder „der Spiegel des maximalen Wasserstandes“ in den Einsenkungen.

7. Alle niedriger liegenden Teile lassen sich in drei Gruppen einteilen: 1) Grössere Senkungen (I Gruppe) ihr Umfang auf den angeschwemmten Böden beträgt im Mittel 73×45 M., bei einer Tiefe des abgeschlossenen Kessels von 53 cm. 2) Einsenkungen der II Gruppe—26×9M. bei einer Tiefe von weniger als 20 sm , und 3) kleine Einsenkungen und Vertiefungen, von der Oberfläche aus kaum bemerkbar

8. Der Bodenkomplex setzt sich folgendermassen zusammen; stark podsolischer Boden mit normaler Oberkrume (auf dem Plateau und den niederen Teilen der Hänge) — 40,5% 2) stark podsolischer mit abgeschwemmter Oberkrume (auf den höchst gelegenen Teilen der Mikrohänge, der Kämmchen und kleinen Kuppeln)—29,3% 3) podsolisch—sumpfiger mit angeschwemmter Oberkrume (in den Einsenkungen und Schluchten)—28,2% von ihnen werden 4,2% von den versunften Böden der Einsenkungen eingenommen

7. Der Löss ist ein Umlagerungsprodukt der karbonathaltigen Moränen, weswegen er selbst ein Karbonathaltiges Gestein darstellt. Bei den Vorgängen der Boden bildung werden die Karbonate ausgeschwemmt in verschiedene Tiefen, in Abhängigkeit vom Klima, der Vegetation und dem Relief (sowohl Gross—als Kleinrelief).

10. Die ausgebauchten Elemente eines Mikroreliefs-Kuppelnund Kömme brausen am stärksten auf—aus einer Tiefe von 177 sm. an, die horizontalen Kleinflächen sind tiefer ausgelaugt—bis 250 sm; die oberen Teile der Hänge brausen von einer Tiefe von 184 sm. an auf; die Mitte der Hänge von

212sm an, die unteren Teile der Hänge von 300 sm. an. Die Einsenkungen der ersten und zweiten Gruppe brausen überhaupt nicht auf bis zur Morene. Die kleinen Einsenkungen und Vertiefungen (ohne angeschwemmten Boden brausen von 50—100 sm. grösserer Tiefe an auf, als die sie umgebenden ebenen Flächen. Die mittlere Tiefe des Aufbrausen beträgt bei algeschwemmten Böden 195 sm., bei normalen 250 sm., während angeschwemmte gewöhnlich bis zu den Morenen hin nicht aufbrausen.

11. Die aller wahrscheinlichste Art der Bildung der Einsenkungen des Stebutschen Versuchsfeldes besteht wohl im Socken und einer Verhärtung des Bodens veranlasst durch das Auslaugen der Karbonate und anderer löslicher Verbindungen aus dem Löss. Das voraussichtliche Schicksal des Mikroreliefs im natürlichen Verlaufe der Dinge besteht in dem Uebergang der Einsenkungen in ein Netz von immerfoct anwachsen der Schluchten.

12. Verschiedene Bodentypen reagiren nicht in gleicher Weise auf Bearbeitung und Düngung, im Sinne einer Ertragssteigerung.

A. M.

Да пытаньня аб скарыстаньні азоту з торфу ў сельскай гаспадарцы.

Пытаньне аб ужываньні торфу як угнаеньня даўно вырашана ў дадатным сэнсе сялянамі Архангельскай губ. У „Историческом писании Архангельской губ.“ 1885 году ёсьць паказаньні на торфавае ўгнаеньне (И. С. Бирюзов „Торфяное удобрение и его применение на нашем севере“).

Там торф, перш чым пакласьці ў глебу, падрыхтоўваюць, каб дапамагчы распаду яго арганічнай масы і адшчэпленую пажыўную матэрыю зрабіць даступнаю расьлінам. Способы падрыхтоўкі наступныя: 1) прапусканьне торфу праз скотны двор, у якасьці падсьцілу для скаціны і 2) кампаставаньне торфу з попелам, вапнаю і рознымі адкідамі сельскай гаспадаркі, з паліўкаю жыжкаю з пад гною, памыямі і да т. п.

У Прыбальтыцы і Фінляндыі кампаставаньне торфу з вапнаю і попелам звычайная рэч (журн. Baltische Wochenschrift).

Такім чынам, пытаньне аб ужытку торфу ў сельскай гаспадарцы, як угнаеньня, вырашана ў роўнай меры латышом, фінам і расійцам, ня гледзячы на розныя гаспадарчыя ўмовы.

Падвышэньне ўраджаяў у гаспадарцы залежыць ад пакладу угнаеньня, а колькасьць апошняга ёсьць функцыя жывёлагадоўлі ў той-час, калі выраб мінэральных угнаеньняў яшчэ толькі пачынаецца, і гаспадарка мусіць карыстацца амаль што выключна гноем. Разьвіццё-ж жывёлагадоўлі ў сваю чаргу залежыць ад ураджайнасьці палёў, ад стварэньня значнай колькасьці арганічнай матэрыі для корму, як зерня, саломы, сена і да т. п. Ясна, што тут утвараецца круг, з якога нельга выйсьці без замены гною мінэральнымі ўгнаеньнямі, як гэта робіцца ў Нямеччыне, дзе шырока разгорнута хэмічная прамысловасьць, ці шукаць іншых спосабаў, не патрабуючых разьвітай прамысловасьці, ужываючы фасфарыт, вапну, попел, торф, зялёнае ўгнаеньне і інш.

Першае, замена гною мінэральнымі ўгнаеньнямі, цяпер у нас адпадает ці праўдзівей, адыходзіць на задні плян з прычыны пачатковага стану хэмічнай прамысловасьці, а другое — ужытак торфу, фасфарыту, попелу, вапны, як угнаеньня, павінен заняць першае месца.

Ў гэтай працы разглядаецца толькі торфавае ўгнаеньне.

Вялізныя запасы торфу ў паўночнай і сярэдняй частцы СССР. (Для 24-х губ. б. Эўрапэйскгй Расіі без Архангельскай губ. паводле даных Ц. С. К. 1887 г. агульная плошча дасягае 17 міл. дзесяцін) надаюць права спадзявацца на яго аграмаднае значэньне. Калі-ж прыняць пад увагу яго добрую якасьць, як угнаеньня, мяркуючы аб ім, як аб азотавым і арганічным угнаеньні, як растваральніку фасфарыта, а таксама падрахоўваючы яго каштоўнасьць, як падсьцільнага матар‘ялу („Торф и торфяной навоз, как удобрение“ П. Ф. Купреенок), дык яшчэ рэльефней намалюецца тое палажэньне, якое павінен заняць торф у нечарназёмнай паласе СССР (гл. „карту распределения удобрений по районам“ проф. Д. Н. Прянишникова).

Асабліва вялікае значэньне можа мець торф, як угнаеньне, для Беларусі. Значная колькасьць торфавых балот, больш-меньш роўнамерна раскіданых па Беларусі, даюць права спадзявацца на гэта.

Паводле даных Меліазема на Беларусі ёсьць: агульная плошча балот 1643500 дзес., у тым ліку торфавых балот 650000 дз. Глыбіня пакладу торфу ў сярэднім 1 саж. Гэта дасьць каля 1.560.000.000 куб. саж. сырога торфу.

У круглых лічбах у 1 куб. сажні сырога торфу можна лічыць 80—100 пуд. сухога торфу, з 25—30% вільгаці. Калі лічыць колькасьць азоту ў торфе 2—3%. дык кожны куб. саж. будзе мець каля двох пудоў азоту. У сярэднім, значыцца, мы маем для Беларусі запас азоту, зьмешчанага ў арганічнай матэрыі торфу, каля 3-х міліярдаў пудоў (гэтая лічба хутчэй зьніжаная). Пры пераводзе на сэлітру гэта дасьць каля 18-ці міліярдаў пудоў сэлітры. На гэткую колькасьць азоту ў землеробчай краіне нельга не зьвярнуць увагі. Калі прыняць пад увагу беднасьць нашых беларускіх глеб на азот і арганічную матэрыю, дык ужытак торфу, як угнаеньня, адыграе вялікую ролю ў падвышэньні нашых нізкіх ураджаяў (35—40 пуд. з дзесяціны). Трэба сказаць, што торф дапаможа сваімі арганічнымі кісьлямі пэратварыць цяжка-спажыўную P_2O_5 фасфарытаў у даступную расьлінам форму. Вапна, што ёсьць на Беларусі ў задавальняючай колькасьці, дапамагае распаду арганічнай матэрыі торфу, як гэта будзе відаць далей.

Такім чынам, на Беларусі ёсьць вельмі добрыя ўмовы для ўжытку ў сельскай гаспадарцы фасфарыту, торфу, попелу і вапны, як угнаеньня. Праблемы ўгнаеньня нашых палёў, якія распрацоўваюцца Навуковым Інстытутам па Ўгнаеньнях, лябараторыяй праф. Д. Н. Пранішнікава і інш. навуковымі ўстановамі, больш чым дзе-небудзь могуць знайсьці прыстасаваньне на Беларусі.

Калі ў Шэнкурскім і Халмагорскім паветах Архангельскай губ., пры выключнай беднасьці паўночных глеб, кароткім леце з марозамі ў траўні і жніўні, ўраджай трымаецца ў сярэднім 60—70 п. з дзесяціны (сярэдняя ўраджайнасьць па СССР. 50 п. з дзес.), дзякуючы ўгнаеньню торфам, дык пры беларускіх значна больш памысных умовах ураджай павінен быць узьнят яшчэ больш.

У далейшым патрэбна толькі шчыльней падыйсьці да гэтага пытаньня, прызаняцца яго вывучэньнем і адначасна практычным правядзеньнем у жыцьцё ўжо здабытых навукаю рэзультатаў.

Апошнім часам пытаньне аб прыпасаваньні торфу да сельскай гаспадаркі стаіць на чарзе заняткаў шмат якіх дасьледчых устаноў.

Яшчэ ў 1906 годзе Münr і Lainé паказалі, што торф зьяўляецца добрым асяродкам для працы нітрафікуючых бактэрый. Торф значна багацей азотам (1%-3%), чым гной, які мае толькі 0,5% азоту. Натуральна павінна паўстаць пытаньне аб скарыстаньні запасу торфавага азоту для жыўленьня расьлін. У гэтым кірунку вялося і вядзецца шмат працы. Ня пераказваючы іх усіх, супынімся ў агульных рысах толькі на некаторых.

У гэтым кірунку шмат чаго зроблена клясычнымі досьледамі Wollny (Wollny. Die zersetzung der organischen stoffe und die Humusbildungen. Heidelberg. 1897. s. 185), які вывучаў уплыў вапны на працэсы раскладаньня торфу.

Вялікая праца, што да працэсаў нітрыфікацыі і дэнітрыфікацыі ў торфе, зроблена Arnd'ам у Брэмене, дзе ён адзначае выдатную ролю вапны пры раскладаньні торфу.

Tacke, Immendorf і Missen (Landw. Jahrbücher. s. 78 Bd 27. Ergänrungsband 4, s 349) паказалі, што пры задавальняючым вапнаваньні балотавых глеб нітрыфікацыя ідзе, а пры недастачы вапны не.

Каб сьцьвердзіць вывады Tacke і інш. Arnd падае цэлы шэраг досьледаў, з якіх відаць, што як толькі ў глебу дадаць $CaCO_3$ і заразіць, дык нітрыфікацыя ідзе, што відаць з наступнай табліцы.

Для нітрыфікацыі дан $(NH_4)_2SO_4$, што адпавядае 31,2mlgr. N. Заражонасьць глебаю ў колькасьці 2%-10% ад пажыўнога раствору.

№№ досьледаў	Сьвежая глеба ў колькасьці 70 gr	Колькасьць $CaCO_3$ ў gr	Пад канец досьледу было знойдзена	
			N аманіяку ў mlgr	Злучаны з кіслародам азот ў mlgr
1	Махавы торф з Каралаўскага балота Дзялянкі—20, 11, 14	—	29,8	Сьляды
2		—	29,9	„
3		—	30,1	„
4		—	28,6	„
5		0,25	28.3	„
6		—	28,3	„
7		—	26,1	„
8		0,5	27,1	„
9		—	26,8	„
10		—	—	23,8
11		1,0	—	23.4
12		—	—	23,5
13		—	—	20,1
14		2,5	—	23,2
15		—	—	22,6

З досьледаў Andr'a ясна відаць роля $CaCO_3$ у пераводзе N з аманіякавых злучэньняў у нітраты.

Шырокія досьледы адбыліся на Энгэльгардаўскай дасьледчай с.-г. станцыі. Торф клаўся ў колькасьці 4800 п. на дзесяціну з тым разрахункам, каб з ім клалася столькі арганічнай матэрыі, колькі з саломенным гноем. У 1910 годзе торф на пустапарожняй зямлі падняў ураджай на 29%, саломенны гной—на 40%. Торф у наступныя гады падвышаў ураджай зерня да 25%. З досьледаў высьветлілася, што торфавы гной у нармальнай колькасьці мала чым паддаецца саломеннаму гною і толькі палавінная яго колькасьць робіць слабейшы ўплыў, чым саломенны гной. З дабаўкаю да торфу крэйды ён значна перавышае саломенны.

У 1891 і 1892 г.г. Запольская дасьледчая станцыя Ленінградзкай губ., на сугліністай глебе з зімовым жытам паказала, што дабаўка да торфу фасфарыту дала дадатны рэзультат.

Асабліва многа вэгэтацыйных досьледаў з торфам было зроблена ў лябараторыі праф. Д. Н. Пранішнікава. Ува ўсіх досьледах торф дзейнічаў дадатна. Гэты ўплыў яго быў яшчэ большым, калі торф клаўся з вапнаю, якая зьяўляецца добрым нэйтралізатарам арганічных і іншых кісьляў, што знаходзяцца ў торфе, і дапамагае раскладаньню торфа.

Падаю адну табліцу з кнігі П. Р. Купраёнка „Торф и торфяной навоз, как удобрение“.

Уплыў попелу і вапны пры махавым торфе на ўраджай сухой матэрыі.

№№ судзін	Угнаеньні	Сярэдняя вага зерня ў gr з 2-х судзін	Сярэдняя вага саломы ў gr з 2-х судзін	Сярэдняя вага надземнага ўраджаю з 2-х судзін ў gr	%% ухіленьняў	Надземны ураджай ў %%
3 і 4	КР	4,28	6,17	10,45	7,7	100
9 і 10	КР+торф	8,71	16,74	25,45	3,4	243
25 і 26	КР+торф+попел . .	10,86	20.49	31,35	2,8	300
29 і 30	КР+попел	6,90	16,38	23,28	1,4	223
87 і 88	КР+торф+вапна . .	12,56	20,27	32.63	1,7	314
85 і 86	КР+вапна	5,54	8,11	13,65	5,0	131

Адсюль відаць, што адзін торф падвышае ўраджай на 143%, дабаўка к торфу попелу на 200%, а торф, попел і вапна падвышаюць ураджай на 214%.

Апошнім часам вядуцца працы па кампаставаньню са шчолачамі і фасфарытам. У першым выпадку шчолачы дапамагаюць нэйтралізаваньню кісьляў, раскладзенай арганічнай матэрыі торфу і мінэралізаваньню азота, а ў другім—фасфарыт раскладаецца торфам (торфавымі кісьлямі) і фосфар, які там зьмяшчаецца, становіцца дастпуным для расьлін. „Пры шырокім стасунку між колькасьцямі торфу і фасфарыту можна раскладаньне фасфарыту давесьці да $^{2}/_{3}$ ад таго раскладаньня, што робіцца серкаваю кісьляю ў супэрфасфатнай вытворчасьці“. З тэз дакладу „О значение торфа, как материала для приготовления навоза и компоста“ праф. Д. Н. Пранішнікава.

Такім чынам, вельмі цікаваю і многа абяцаючаю зьяўляецца праблема праф. Д. Н. Пранішнікава аб падрыхтаваньні штучнага гною, яшчэ больш багатага пажыўною матэрыяй, чым гной з-пад скаціны, шляхам кампаставаньня торфу са шчолачамі і фасфарытам; гэтым можна будзе падвысіць належным чынам нашы нізкія ўраджаі. Аднэю з прац у гэтым кірунку ёсьць яшчэ неапублікаваная праца студэнта Ц. С.-Г. Акадэміі Рындзіна, з якой відаць, што пры кампаставаньні торфу з CaO вельмі добра ідзе мінэралізаваньне торфавага азоту. За 158 дзён досьледу мінэралізована да 15% (14,76%) ад агульнай колькасьці азоту, што знаходзіцца ў торфе.

Гэтая праца мае на мэце прасачыць дынаміку азота пры кампаставаньні торфу шчолачамі, і праведзена ў лябараторыі прафэсара Д. Н. Пранікава пад кіраўніцтвам П. Р. Купраёнка.

1. Досьлед у лябараторыі.

Дасьледны матар'ял. Для досьледу быў узяты торф з моху ў балоце Алфёрава пры ст. Рашэтнікаў, Кастр. чыг. Торф узят з пакунку, прыгатаванага для падсьцілу, слаба раскладзены з ясна прыкметнымі сьцяблямі моху (Sphagnum). Батанічны склад узятага торфу быў прыблізна наступны:

Sphagnum (medium і інш. віды)	50-60%
Eriophorum vaginatum	20%
Дамешкі (белы верас, карэньні і драўніна хвоі і інш.)	20-30%

хэмічны склад:

На абсалютна сухую матэрыю торфа N	1,03%
У 100 gr попелу трымаецца CaO	15,75 „
Попелу на абс. сух. матэрыю торфа	4,09 „

Пачатковы матар'ял торфу трымаў 24,27% гіграскапічнай вільгаці. Вільгаёмістасьць торфу 864,1%.

Ненасычанасьць торфу аснаваньнямі вызначана па $BaCl_2$—1,7% (у досьледзе прынята 2%).

Пры загатоўцы воднай выцяжкі, як з пачатковага матар'ялу, таксама і ў час досьледу, браўся стасунак торфу к вадзе 1 : 30, узбоўтывалася 20 хвілін.

Рэзультат аналізу воднай выцяжкі з пачатковага матар'ялу торфа:

На 100 gr абсалютна сухога торфу NO_3—

„ „ „ „ „ „ NO_2 0,49 mlgr

„ „ „ „ „ „ NH_3 17,81 „

PH . . . . 6,64 „

Агульная шчолачнасьць: на 100 gr абсал. сух. торфу $\frac{2N}{100}$ HCl — 103,9 куб. с.

Агульная кісьлясьць: на 100 gr абс. сух. торфу $\frac{2N}{100}$ $Ba(OH)_2$ — 37,4 куб. с.

Воднарастварымага CaO ад абс. сух. торфу—0,068%.

Воднарастварымай арганічнай матэрыі, паводле Ішчарэкава на 100 gr абс. сух. торфу 0,35 gr

Узятая для заражэньня кампостаў нітрыфікатамі гародная зямля трымала 0,55% агульнага N, а водная выцяжка з яе (браўся стасунак зямлі к вадзе 1 : 4 і ўзбоўтывалася 20 хвілін) зьмяшчала наступнае:

На 100 gr абсалютна сухой зямлі NO_3—1,02 mgr
„ „ „ „ „ „ NO_2—сьляды
„ „ „ „ „ „ NH_3—0,93 mgr
PH . . . . 7,35 „

Нягашаная вапна зьмяшчала: CaO—85%, $CaCO_3$—15%.

Колькасьць у мяшаным дрэўным попелу K, Na, Ca і Mg бралася сярэдняя, паводле „справочной книги русского сельского хозяина“ (Выд. 2-е 1896 г.).

K —10%
Na—2,5 „
Ca—30 „
Mg— 5 „

Схэма і разрахунак досьледу.

Мэта досьледу—прасачыць дынаміку N (NO_3, NO_2 і NH_3) пасьля кампаставаньня торфу з попелам і CaO ў розных камбінацыях. Былі закладзены два роўналежныя досьледы: з заражэньнем нітрыфікатарамі (гароднаю зямлёю) і без заражэньня. Камбінацыі браліся наступныя: 1) торф, 2) торф + 1% CaO, 3) торф + 2% CaO, 4) торф + 4% CaO, 5) торф + 4% попелу і 6) торф + 4% попелу + 0,38% CaO. Прычым, у выніку таго, што ўзятая нягашаная вапна зьмяшчала 15% $CaCO_3$, бралася адпаведна гэтаму большая яе колькасьць. У попелу бралася пад увагу знаходжаньне соляў K, Na, Ca і Mg і ўсё пераводзілася для прастаты разрахунку на CaO. Пры гэтым выявілася, што ў попелу CaO было 53,13%, а таму, каб пакласьці аснаваньняў да поўнай насычанасьці торфу, трэба было 3,7% попелу, але для прастаты клалася 4%. Нельга было спадзявацца, каб 4% попелу зрабілі такі самы ўплыў, як 2% CaO, дзеля таго што з попелам пападалі і іншыя непадлічаныя фактары, здольныя рабіць належны ўплыў на працэсы, што адбываюцца ў кампостах. У камбінацыі, калі да попелу дабаўлялі CaO, дык яе (CaO) дабаўлялі столькі, каб паміж соляў K і Na ў попелу і $Ca(OH)_2$ адбываліся поўнасьцю рэакцыі:

1) $K_2CO_3 + Ca(OH)_2 + H_2O = 2KOH + Ca(OH)_2 + CO_2$

2) $Na_2CO_3 + Ca(OH)_2 + H_2O = 2NaOH + Ca(OH)_2 + CO_2$

Пры гэтым разрахунку K_2CO_3 і Na_2CO_3 пераводзіліся на K_2O.

Заражэньне рабілася гароднаю зямлёю з падліку 5 gr абсалютна сухой гароднай зямлі на 100 gr абс. сух. торфу.

Кампосты закладзены ў звычайных вэгэтацыйных шкляных судзінах у кожнай па 100 gr абсалютна сухога торфу з адпаведнаю колькасьцю попелу і нягашанай вапны. Вільготнасьць трымалася ўвесь час 60% ад поўнай вільгаёмістасьці торфу. Паліўка рабілася па меры выпарваньня па вазе. Для лепшай аэрацыі кампосты ад часу да часу старанна перамешваліся. Кампосты захоўваліся пры тэмпэратуры 17-21°C. і толькі к канцу досьледа перадапошняга і апошняга тэрміну ў аналізе тэмпэратура была ніжэй за 15° C. Досьлед закладзен 22-25 лістапада 1924 г.

Рэзультаты аналізу.

Даныя пэрыядычнага аналізу водных выцяжак з незаражоных і заражоных нітрыфікатарамі кампостаў паказаны ў табліцах і дыяграмах, зьмешчаных у канцы артыкулу. Тут-жа супынімся толькі каротка на іх разборы.

З табліцы № 1 і дыяграм №№ 1 і 2 відаць, што нітрыфікацыя адбываецца ў кампостах, як з заражэньнем, так і без заражэньня, ў выпадку, калі пакладзены попел і вапна ў тэй ці іншай колькасьці. Нават няпоўная насычанасьць 1% CaO ўжо выклікала нітрыфікацыю, але тут яна пачалася толькі пазьней. У кампостах без заражэньня нітрыфікацыйныя працэсы пачаліся з значным апазьненьнем. У той час, калі ў заражоных судзінах нітрыфікацыя была ўжо выяўлена ў поўнай меры на 24 дзень ува ўсіх судзінах, апрача аднаго торфу, у незаражоных судзінах нітрыфікацыя яшчэ не пачыналася і толькі былі зазначаны сьляды NO_3, дзе было пакладзена 4% CaO. Спачатку нітрыфікацыя ідзе бурна, але хутка паслабляецца і нават пачынаецца зьніканьне нітратаў там, дзе пакладзена больш шчолачаў. У той час, калі за 72 дні ў незаражоных кампостах з 4% попелу ствараецца 388,51 mgr NO_3, а з 4% попелу + + 0,38% CaO — 387,1 mgr, дык праз 151 дзень у гэтых кампостах знойдзена належна па 408 і 474 mgr NO_3 на 100 gr абс. сухога кампосту; у заражоных кампостах з 2% CaO праз 72 дні—405 mgr, а праз 151 дзень—463 mgr NO_3.

Такім чынам, можна дапусьціць, што мінэралізаваньне азоту ў торфе можа быць да пэўнае мяжы ў тым выпадку, калі прадукты жыцьцядзейнасьці нітрыфікатараў (NO_3) ня будуць тым ці іншым спосабам выдалены, і што бяз іх выдаленьня ўвесь азот у торфе ня можа мінэралізавацца. Гэткае дапушчэньне вымагае далейшых у гэтым кірунку досьледаў. У адным торфе без заражэньня нітрыфікацыі зусім ня было, а з заражэньнем толькі на 151 дзень зьявілася трохі NO_3 (16 mgr на 100 gr абс. сух. торфу).

У дыяграме № 1 адзначаецца нібы няўвязка. Спачатку ідзе павялічэньне аманіяку, а потым яго зьмяншэньне, між тым як NO_3 не ствараецца, і робіцца ўражаньне, што NH_3 зьнікае няма ведама куды. Гэта бывае з тае прычыны, што малыя колькасьці NO_3 не маглі быць падлічаны, дзякуючы афарбоўцы водных выцяжак; апрача таго, з памяншэньнем NH_3 заўсёды наглядалася павялічэньне NO_2, што не паказана на дыяграме з прычыны іх нязначнай колькасьці.

У адваротным парадку ідзе зьніканьне нітратаў: там, дзе яны перш зьявіліся, там і раней пачынаецца іх зьніканьне. Асабліва яўнае зьніканьне NO_3 адбылося ў кампостах з заражэньнем з 4% CaO, 4% попелу і 4% попелу + 0,38% CaO, дзе, як відаць, з гароднаю зямлёю пакладзены фактары, дапамагаючыя гэтаму зьявішчу. У кампостах-жа без заражэньня пачалося зьніканьне NO_3 толькі з 4% CaO. Далей будзе выяўлена сувязь гэтага зьявішча з PH і воднараствáрымаю арганічнаю матэрыяй.

Зьніканьне NO_3 ў некаторых кампостах выклікала канечную патрэбу ў тым, каб зрабіць выяўленьне агульнай колькасьці азоту спосабам Іодльбаўэра, каб выявіць, якая колькасьць агульнага азоту будзе ў кампостах, дзе NO_3 зьніклі і дзе не. Для гэтага мною зроблена выяўленьне агульнай колькасьці N ў заражоных кампостах: 1) Торф + 2% CaO, дзе ня было ўпаду нітратаў, і 2) Торф + 4% попелу + 0,38% CaO, дзе зьніканьне NO_3 выявілася ў поўнай меры—да сьлядоў.

Рэзультаты выяўленьня агульнай колькасьці азоту былі наступныя:

1) Торф + 2% CaO . . . . 1,07% N

2) „ + 4 „ попелу + 0,38% CaO . 1,1 „ N

Раўнуючы гэтую колькасьць агульнага азоту з колькасьцю азоту ў пачатковым матар'яле, дзе было знойдзена 1,03%, можна, ня робячы з прычыны малой колькасьці нагляданых фактаў пэўных вывадаў, сказаць, што памяшэньня азоту ня было пасьля зьніканьня NO_3, а таму можна здагадвацца ў даным выпадку аб адсутнасьці дэнітрыфікацыйных працэсаў у вузкім сэнсе гэтае зьявы, а нітраты страчаны ў працэсах біяляґічнага жыцьця ў кампостах і ператвораны на нерастварымае бялковае злучэньне, як гэта мае месца ў чарназёмных глебах. (Артыкул проф. А. Н. Лебедянцева „Значение фосфоритов для сельского хозяйства северной половины черноземной полосы“.—Труды Научного Института по Удобрениям, вып. 12).

Магчыма таксама частково і фізыка-хэмічнае паглынаньне азотнай кісьлі, як гэта адбываецца ў чарназёме. (Научно-Агрономический журнал № 2 1924 г. Артыкул праф. А. А. Шмук. „Из явлений поглощения азота селитры черноземной почвы“).

У 5 тэрмін аналізу значны % мінэралізованага азоту ў кампостах належыць да NH_3, які намнажаецца адначасна з нітрыфікацыяй, тымчасам у кампостах з заражэньнем ідзе памяншэньне NH_3.

У кампостах без шчолачаў, як з заражэньнем, так і без заражэньня NH_3 павялічваўся да пэўнага роўню і потым заставаўся нязьменным. Адначасна з азотам шукалася РН, воднарастварымая арганічная матэрыя, паводле Ішчарэкава, агульная шчолачнасьць і кісьлясьць.

РН (табліца № 2 і дыяграмы №№ 3 і 4) у водных выцяжках з усіх кампостаў мянялася ў межах ад 6,2 да 7,65. Здавалася-б РН было такім, што не перашкаджала разьвіцьцю нітрыфікуючых бактэрый. Для высьвятленьня канцэтрацыі вадародных іонаў у кампоставым растворы, дзе нітрыфікацыя выяўлена ў поўнай меры і дзе нітрыфікацыі ня было, мною быў здабыты раствор кампосту праз выцісканьне прэсам. Раствор выходзіў з кампосту з заражэньнем праз 56 дзён пасьля закладкі кампостаў (4 тэрмін аналізу) бяз шчолачаў і з 2% CaO. Адначасна з гэтым у 4 тэрмін аналізу ў водных выцяжках гэтых самых кампостах шукалася воднарастварымая CaO. Рэзультат быў наступны:

РН у кампостным растворы (торф бяз шчолачаў) . . . 5,6

РН „ ч „ („ „ 2% CaO) . . . 5,91

Воднарастварымай CaO ад абсалютна сухоў матэрыі кампосту (торф бяз шчолачаў) — 0,04%.

Воднарастварымай CaO ад абсалютна сухой матэрыі кампосту (торф + 2% CaO) — 1,96%.

Значная адмена воднарастварымай CaO і РН з аднымторфам і торфам з 2% CaO паказвае на важную ролю гэтых фактараў у працэсе мінэралізаваньня азоту арганічнай матэрыі торфу.

Пры разглядзе табліцы зьмяненьня РН відаць нязначны ўхіл у бок кісьлясьці. Што да РН у розных кампостах, дык яно знаходзіцца ў простай залежнасьці ад пакладзеных шчолачаў,—дзе пакладзена больш шчолачаў, там наглядаецца больш РН (выцяжкі больш шчолачны).

Раўнючы дыяграмы №№ 1 і 2—дынамікі азоту—і №№ 3 і 4—зьмяненьня РН, можна ўбачыць, што нітраты пачалі зьнікаць там, дзе РН вышэй 7, і ня зьнікаюць—дзе РН ніжэй 7. Хоць РН велічыня адносная, залежная ад спосабу загатоўкі выцяжак і інш., тым ня менш такое зьявішча паказальна. З працы Т. М. Захаравай „К вопросу о зависимости процесса деннтрификации от реакции среды“ (Труды Научного Института по Удобрениям, вып. 15) відаць, што рэакцыя 7—8,2 дапамагае дэнітрыфікацыі, падкісьленьне асяродку спыняе яе. Зусім можна дапусьціць, што шчолачны асяродак дае магчымасьць і разьвівацца арганізмам, якія злучаюць NO_3 ў складанае бялковае злучэньне, нерастварымае ў вадзе.

Воднарастварымая арганічная матэрыя з нітрыфікацыяй зьмяншаецца (табліца № 3 і дыяграмы № 5 і 6). Асабліва выразна гэта выявілася ў кампостах з заражэньнем, дзе працэс нітрыфікацыі пачаўся раней і цягнуўся даўжэй, чым у кампостах без заражэньня. Са зьніканьнем нітратаў воднарастварымая арганічная матэрыя павялічваецца. Такая сувязь выяўлена Б. А. Голубавым у чарназёмнай глебе пры ўгнаеньні дэфэкацыйнаю гразьзю. „Дефекационная грязь и известь как удобрения в районе свеклосахарного производства. Особенности черноземных почв при удобрении их известью“. У „Сборнике статей по сахарной промышленности“. Выд. 1924 году.

У табліцах №№ 4 і 5 паказаны агульная шчолачнасьць і кісьлясьць. За 12 дзён досьледу як агульная шчолачнасьць, таксама і кісьлясьць падвысіліся; у далейшым агульная шчолачнасьць зьнізілася, а кісьлясьць амаль ня зьмянілася.

У апошні тэрмін аналізу мною параўноўваліся афарбоўкі водных выцяжак з кампостаў, прычым яны разьмясьціліся па спадаючай ступені афарбоўкі гэтак: самую інтэнсыўную афарбоўку (колеру моцнай гарбаты) мелі выцяжкі з кампостаў—1) торф + 4% попелу + 0 38% CaO, потым выцяжкі разьмясьціліся ў наступным парадку: 2) торф + 4% попелу, 3) торф, 4) торф + 4% CaO, 5) торф + 2% CaO і 6) торф + 1% CaO У кампостах з заражэньнем такая градацыя інтэнсыўнасьці афарбоўкі выцяжак выражана значна рэльефней, чым у кампостах без заражэньня.

З тае прычыны, што няма здавальняючых спосабаў выявіць раскладаньне торфу, абмяжаваліся толькі параўнаньнем афарбоўкі кампостаў. Дзеля гэтага мною браліся аднакавыя колькасьці кампостаў, клаліся на чыстую белую паперу аднастайнымі кучкамі і параўнаньне рабілася навока. Паводле цьмянасьці афарбоўкі як з заражэньнем, так і без заражэньня, кампосты разьмясьціліся наступным чынам, пачынаючы ад самых цьмяных, блізу чорных: 1) торф + 4% CaO, 2) торф + 4% попелу + 0,38% CaO, 3) торф + 4% попелу, 4) торф + 2% CaO, 5) торф + 1% CaO і 6) адзін торф. Кампост з аднаго торфу бяз шчолачаў аказаўся самым сьветлым, амаль што зусім нераскладзеным.

У зьвязку з тым, што торф зьяўляецца нібы губкаю, якая паглынае аманіяк і трымае яго, не даючы магчымасьці перайсьці ў водную выцяжку, і каб даведацца, ці адзін толькі аманіяк пераходзіць у нітраты пры кампаставаньні торфу, мною быў зроблен наступны досьлед. Праз 10 месяцаў ад пачатку кампаставаньня торфу мінэралізованы азот з пачатковага матар‘ялу торфа і з кампосту з 1% CaO (з заражэньнем гароднаю зямлёю) выцясьняўся нармальным растворам NaCl і дыстыляванаю вадою. Браліся наважкі, зьмяшчаліся на фільтры бяз попелу і рабілося прамываньне да зьніканьня рэакцыі на NH_3 (рэактыў Nessler’a).

Рэзультаты аналізу паказаны ў табліцы:

№№	Матар'ял	Чым рабілося выцясьненьне	Наважка у gr	pH	NH_3 на 100 gr абс. сух. матэрыі ў mgr			NO_3 на 100 gr абс. сух. матэрыі ў mgr			NO_2	Увага
					NH_3	Азот NH_2	% ад агульн. колькасьці N	NO_3	Азот NO_3	% ад агульн. колькасьці N		
1	Некампаст. торф .	NaCl	2,3279	3,6	79,20	65,18	6,33	—	—	—	Сьляды	
2	„ „ .	H_2O	1,9782	4,4	41,04	33,78	3,28	—	—	—	„	
3	Кампост	NaCl	2,3527	4,4	43,32	35,65	3,46	—	—	—	„	NO_3 не азначалася. Перешкаджала азначэньню NaCl.
4	„	H_2O	1,9588	4,8	20,74	17,07	1,66	531	119,91	11,54	„	

Ад аналізу выцяжкі з кампосту пры стасунку абсалютна-сухога кампосту к вадзе 1:30 былі наступныя вынікі:

На 100 gr абс. сух. кампосту NH_3 5 mgr Азот $NH_3$4,12 mgr % ад агульнай колькасьці N—0,4%.

„ „ „ „ „ „ NO_3—498mgr. Азот NO_3—112,55-mgr 10,93%.

„ „ „ „ „ „ NO_2—сьляды

Калі параўнаць рэзультаты аналізаў воднай выцяжкі пачатковага торфу, зьмешчаныя ў аддзеле: „пачатковы матар'ял“, з рэзультатамі воднай выцяжкі з 10-ці месячнага кампосту з 1%CaO (з заражэньнем) і з рэзультатамі аналізу фільтрату, здабытага прамываньнем нармальным растворам NaCl і H_2O, як пачатковага матар'ялу торфа, таксама і кампосту, дык будзем мець зусім розныя лічбы. Асабліва вялікая розьніца ў колькасьці аманіяку у воднай выцяжцы і фільтраце ад прамываньня некампаставанага торфу і кампосту. У той час, калі ў пачатковым матар'яле торфу ў выпадках воднай выцяжкі было N—1,41% ад агульнай колькасьці торфавага азоту,—пры выцясьненьні дыстыляванаю вадою 3,28%,—а пры выцясьненьні нармальным растворам NaCl—6,33% ад агульнай колькасьці торфавага азоту. У кампосьце воднаю выцяжкаю выяўлена 0,4% аманіячнага азоту і 10,93% нітратнага азоту ад агульнай колькасьці азоту, у той час, калі шляхам выцясьненьня вадою атрымана 1,66% азоту NH_3 і 11,54% азоту NO_3, а пры выцясьнені нармальным растворам NaCl—3.46% азоту NH_3 ад агульнай колькасьці кампоставага азоту; што да азоту NO_3, дык яго ў даным выпадку не ўдалося азначыць дзякуючы NaCl.

З параўнаньня колькасьці featureзнага азоту, выцесьненага вадою з пачатковага матар'ялу торфа і з кампосту, бачым, што яго з апошняга выцеснена значна больш—13,2% ад агульнай колькасьці кампоставага азоту, тады як з першага (пачатковага матар'ялу торфа)—3,28%. Гэта дазваляе сказаць, што частка азоту арганічнай матэрыі торфу перайшло ў мінэральную форму даступную для жыўленьня расьлін.

Даны досьлед не вырашае наогул пытаньня аб скарыстаньні торфавага азоту ў сельскай гаспадарцы, дзеля таго што працэсы мінэралізаваньня пойдуць, як відаць, зусім у іншым кірунку, калі ўзяць для досьледу які-небудзь іншы торф, створаны пры іншых умовах і пры іншай расьлінай фармацыі. Ён становіць толькі праблемы, якія могуць вырайшацца далейшаю працаю.

Гэты невялікі матар'ял паказвае на складанасьць працэсаў, што адбываюцца ў кампостах, залежных ад размаітых прычын (гэнэзісу торфа, батанічнага складу, бактэрыяльных працэсаў, кампаставаньня і інш.) і паказвае, што гэтыя працэсы могуць быць лепш вывучаны сумеснаю працаю аграхэмікаў, глебазнаўцаў, батанікаў, бактэрыалёгаў.

У выніку гэтае працы можна зрабіць наступныя вывады для данага торфу і умоў, пры якіх быў пастаўлен досьлед.

1) Пры кампаставаньні торфу з шчолачамі нітрыфікацыя адбываецца; без заражэньня нітрыфікатарамі яна пачынаецца пазьней.

2) Калі торф кампастуецца бяз шчолачаў, дык нітрыфікацыя ў ім ня мае месца.

3) Нітрыфікацыя спачатку ідзе напорна, а потым сьціхае і нават зусім спыняецца.

4) Намнажэньне нітратаў ідзе да пэўнага моманту, пасьля якога ў залежнасьці ад умоў яны ці зьнікаюцьне ці намнажаюцца.

5. Нітрыфікацыя залежыць ад PH, якая зьяўляецца функцыяй шчолачай.

6. Зьніканьне нітратаў пачынаецца там, дзе большая шчолачнасьць (PH>7). Пытаньне аб тым, куды дзяваюцца нітраты, вымагае далейшых досьледаў.

7. Са зьніканьнем нітратаў воднарастварымая арганічная матэрыя павялічваецца. (Гэтая зьява адзначаецца, як факт. Сувязь яе са зьніканьнем нітратаў вымагае далейшых тлумачэньняў).

II. Вэгэтацыйны досьлед.

Кам мець адказ ад самой расьліны, я правёў кампосты праз вэгэтацыйны досьлед. Мэта досьледу — высьвятленьне пытаньня аб скарыстаньні торфу расьлінамі.

Для досьледу была ўзята глеба з пяскова-бульбянага дасьледчага поля (Малахаўка, Маскоўскай губ.). Глеба перш адсявалася на рэшаце ад буйных камкоў, каменьня і трэсак. Высушвалася глеба да паветранасухога стану. У такім стане яна мела 5,43% гіграскапічнае вады. Поўная вільгаёмістасьць глебы 27%. З глебы рабілася перш водная выцяжка пры стасунку глебы к вадзе 1:5 і ўзбоўтывалася 20 хвілін.

Рэзультаты аналізу воднае выцяжкі былі наступныя:

На 1 kgr абс. сух глебы: NO_3 — 62 mgr, NH_3 — 1,5 mgr, NO_2 — сьляды. PH воднай выцяжкі—6,81.

Для досьледу былі ўзяты вялікія шкляныя вэгэтацыйныя судзіны. Глебы на кожную судзіну клалася 5 kgr. Дрэнаж у судзінах—паўконусы з пяском.

Колькасьць торфу і кампосту на судзіну бралася 60 gr абс. сух. (каля 0,6 gr N на судзіну), што пры пералічэньні на дзесяціну дае 2400 пуд. торфу ці кампосту. Na_2HPO_4 1% была дадзена на кожную судзіну 50 к. с. (0,25 gr P_2O_5), KCl% — 119 куб. с. (0,75 gr K_2O).

У вэгэтацыйныя судзіны без кампосту клалася CaO і попелу адпаведна стольки, колькі з 60 gr абс. сух. кампосту, каб падлічыць і іх уплыў на рост расьлін.

Торф, кампост, растворы, CaO і попел перад тым, як пакласьці ў судзіны, перш перамешваліся з глебаю. Была зьвернута ўвага на тое каб пры набіўцы судзін глебаю захоўвалася аднакавая вільготнасьць глебы і аднакавая шчыльнасьць. За ўвесь час досьледу вільготнасьць трымалася ў 60$^0/_0$ ад поўнай вільгаёмістасьці глебы. Вільгатаёмістасьць торфу таксама бралася пад увагу. На працягу досьледа судзіны паліваліся па вазе.

Для досьледу браліся 4 парных судзіны, з якіх 3 былі з расьлінамі і адна без расьліны. У апошняй судзіне пэрыядычна браліся пробы для воднай выцяжкі, у якіх (пробах) азначаліся розныя віды азоту (NO_3, NO_2 і NH_3) і PH. Гэткі аналіз даў нам магчымасьць сачыць за працэсамі, што адбываюцца ў глебе без расьлін, хоць пад расьлінамі працэсы ідуць зусім па іншаму з тае прычыны, што намножаныя нітраты ішлі на жыўленьне расьлін; але аб гэтых працэсах нам казаў знадворны выгляд расьліны, якая разьвівалася. Пасьля ўборкі расьлін быў зроблен аналіз воднай выцяжкі з глебы з-пад расьлін. Рэзультаты аналізу зьмешчаны ў канцы тэксту ў табліцы № 6. З табліцы відаць, што ў судзінах з торфам нітратаў увесь час досьледу было больш, за выключэньнем: 1) N_{17} KP + кампост T. з 1$^0/_0$ CaO без заражэньня ў 3 і 4 тэрмін аналізу, 2) N_{13} KP+ кампост торфу без заражэньня ў 1 тэрмін аналізу, 3) N_{29} кампост торфу з 4$^0/_0$ попелу без заражэньня ў 4 тэрмін аналізу, 4) N_{33} KP+ кампост торфу з 4$^0/_0$ попелу + 0,38$^0/_0$ CaO без заражэньня ў 3 і 4 тэрміны аналізу, 5) N_{73} KP+кампост торфу з 4$^0/_0$ попелу з заражэньнем у 3 тэрмін аналізу і 6) N_{77} KP+ кампост торфу з 4$^0/_0$ попелу + 0,38$^0/_0$ CaO з заражэньнем у 2 тэрмін аналізу.

Сяўба, вэгэтацыйны пэрыяд і уборка.

Расьлінаю для досьледу быў узяты авёс. Сяўба зроблена 9 чэрвеня. Насеньне перш прарошчвалася між аркушаў фільтравальнай паперы, якія мачыліся дыстыляванаю вадою, і пасаджана ў судзіны прарослым ужо настолькі, каб карэньчык быў роўны з даўжынёю зерня. Пасадка рабілася на глыбіню 2 см. У кожную судзіну пасаджана па 10 шт. зернят. Пасьля прарэджваньня ў судзінах засталося па 5 расьлін. Для большасьці расьлін пачатак куставаньня 30 чэвреня, пачатак калашэньня 23 ліпеня і пачатак дасьпяваньня 10 жніўня.

У час вэгэтацыі расьліны ў судзінах з кампостам выглядалі значна лепш па моцы разьвіцьця і яскравей па зялёнасьці, чым расьліны ў судзінах без кампосту.

З пачатку вэгэтацыйнага пэрыяду асабліва добры выгляд мелі расьліны ў судзінах, дзе былі пакладзены кампосты без заражэньня гароднаю зямлёю (NN 13—33 з расьлінамі). Судзіны-ж з кампостамі з заражэньнем (NN 57—80 з расьлінамі), хоць і мелі добры зялёны выгляд, але крыху спазьняліся ў росьце і толькі ў другі пэрыяд вэгэтацыі, пасьля калашэньня, яны пачалі даганяць у росьце расьліны ў судзінах з кампостамі без заражэньня, а к канцу вэгэтацыі выглядалі крыху лепш. Расьліны зьняты ня зусім сьпелымі, чаму ў табліцы пздаецца сярэдняя вага надземнага ўраджаю:

№№ судзін	УГНАЕНЬНІ	Сярэдняя вага надземнага ўраджаю з 3-х судзін.	$^0/_0$ ухіленьняў ураджаю ад сярэдняга.	Надземны ураджай у $^0/_0$
6, 7 і 8	КР	8,48	7,2	100
10, 11 і 12	КР + пачатковы матар'ял торфу	10,78	7,3	125,94
14, 15 і 16	КР+кампаставаны торф без заражэньня	9,64	19,5	114,03
18, 19 і 20	КР + „ „ з $1^0/_0$ CaO б. з.	11,8	5,0	139,15
22, 23 і 24	КР + „ „ з $2^0/_0$ CaO б. з.	13,02	2,4	153,53
26, 27 і 28	КР + „ „ з $4^0/_0$ CaO б. з.	12,03	3,7	141,86
30, 31 і 32	КР + „ „ з $4^0/_0$ попелу б. з.	12,23	4,5	144,22
34, 35 і 36	КР + „ „ з $4^0/_0$ попелу + + $0{,}38^0/_0$ CaO без. зар.	12,37	4,7	145,87
38, 39 і 40	КР + 0,64 gr CaO	9,02	9,3	106,35
42, 43 і 44	КР + 1,27 gr CaO	8,58	6,3	101,18
46, 47 і 48	КР + 2,54 gr CaO	9,82	5,2	115,80
50, 51 і 52	КР + 2,4 gr попелу	9,92	9,6	116,98
54, 55 і 56	КР + 2,4 gr попелу + 0,23 gr CaO	10,20	7,2	120,28
58, 59 і 60	КР + камп. торф з заражэньнем	12,50	4,3	147,41
62, 63 і 64	КР + „ „ з $1^0/_0$ CaO з зараж.	12,60	5,8	148,58
66, 67 і 68	КР + „ „ з $2^0/_0$ CaO з зараж.	13,95	4,5	164,5
70, 71 і 72	КР + „ „ з $4^0/_0$ CaO з зараж.	11,97	8,5	141,17
74, 75 і 76	КР + „ „ з $4^0/_0$ попелу з зар.	12,43	4,1	146,58
78, 79 і 80	КР + „ „ з $4^0/_0$ попелу + + $0{,}38^0/_0$ CaO з зараж.	12,47	11,0	147,05

Грунтуючыся на атрыманых даных надземнай масы, адзначаных у табліцы і раўнуючы ўраджай у судзінах з кампостамі і бяз іх, трэба адзначыць наступнае:

1. Падвышэньне ўраджаю было ўва ўсіх судзінах, куды былі пакладзены кампосты і торф.

2. Значны прырост ураджаю надземнай масы атрымаўся там, дзе ў кампосты было пакладзена 2% CaO. (У кампостах без заражэньня—53,53%, а з заражэньнем—64,5%).

3. Атрыманы прырост ураджаю можна залічыць на кошт памыснага дзейнічаньня торфавага ўгнаеныя.

4. У судзінах з CaO і попелам ураджай атрымаўся крыху вышэй, чым у судзінах з KP. Пакладзеньня шчолачы шкоднага ўчынку на разьвіцьцё расьлін не зрабілі.

П. С. Трус.

Табліца № 2

зьмяненьня PH у водных выцяжках з торфавых кампостаў

Тэрміны аналізу	Торф		Торф + +1% CaO		Торф + +2% CaO		Торф + +4% CaO		Торф + +4% попелу		Торф + +4% попелу + +0,38% Cao	
	Без заражэньня	З заражэньнем	Без заражэньня	З заражэньнем	Без заражэньня	З заражэньнем	Без заражэньня	З заражэньнем	Без заражэньня	З заражэньнем	Без заражэньня	З заражэньнем
Праз 12 дзён .	6,44	6,44	7,15	6,79	7,35	6,88	7,35	7,37	7,15	7,37	7,35	7,37
„ 24 дні .	6,22	6,22	6,44	6.22	7,12	6,95	7,63	7,37	7,20	7,37	7,37	7.20
„ 40 дзён .	6,33	6,47	6,76	6,88	7,20	7,15	7,6	7,50	7,20	7,25	7.37	7,35
„ 56 „ .	6,47	6,22	6,64	6,55	7,06	6,81	7,15	7,35	6,98	6,89	7,06	7,15
„ 72 дні .	6,35	6,34	6,43	6,72	7,15	6,81	7,50	7,65	6,55	7,25	6,98	7,35
„ 151 дзень	6,45	6,22	6,54	6,34	6.81	6.64	7,35	7,65	6,34	7,15	6,81	7,35

Табліца № 3

зьмяненьня воднараствarымае арганічнае матэрыі паводле Ішчэрэкава ў gr на 100 gr абсалютна сухога торфу

Праз 12 дзён .	0,29	0,234	0,328	0,354	0,35	0,337	0,391	0,411	0,342	0,363	0,348	0,331
„ 24 дні .	0,35	0,426	0,386	0,46	0,47	0,437	0,522	0,466	0,485	0,40	0,443	0,457
„ 40 дзён .	0,275	0,305	0,29	0,285	0,335	0,325	0,465	0,305	0,41	0,36	0,485	0,365
„ 56 „ .	0,279	0,292	0,405	0,279	0,371	0,243	0,346	0,306	0,415	0,316	0,407	0,34
„ 72 дні .	0.35	0,216	0.372	0,208	0,423	0,184	0.34	0,276	0.367	0,232	0,396	0,297
„ 151 дзень	0,29	0,45	0.22	0.31	0,24	0,33	0,32	0.35	0,25	0,62	0,22	0,68

Табліца № 4

агульнай шчолачнасьці ў водных выцяжках з торфавых кампостаў (колькасьць к. с. $\frac{2N}{100}$ HCl на 10 gr (абсалютна сухога торфу)

Праз 12 дзён .	137,6	128,4	152,9	155,9	351.6	198,7	489,1	363,8	324	311,8	351,6	330,2
„ 24 дні .	58,1	70,3	119,2	97.8	192,6	119,2	256,8	226,2	206,9	217	207.9	186,5
„ 40 дзён .	73,4	85,6	113,1	122,2	177	128,4	321	226.2	131,5	155,9	266	161
„ 56 „ .	66,2	67,3	91,7	85,6	155,9	97,8	186.5	234,4	144,7	134,5	159	185,5
„ 72 дні .	76,4	61,1	125,3	76.4	177	88,7	192	266	118,2	122,3	159	223,2
„ 151 дзень	79,5	61,1	73,4	55	91,7	88.7	220.1	305,7	85,6	204,8	110,1	275,1

Табліца № 5

агульнай кісьлясьці ў водных выцяжках з торфавых кампостаў (колькасьць к. с. $\frac{2N}{100}$ $Ba(OH)_2$ на 100 gr абсалютна сухога торфу)

Праз 12 дзён .	78	71,8	78	65,5	78	62,4	62,4	53	70,1	62,4	70,1	43,7
„ 24 дні .	68,6	67,6	65,5	62,4	53	59,3	53	62,4	62,4	62,4	65,5	49,
„ 40 дзён .	68,6	81,1	59,3	78	59,3	62,4	65,5	53	65,5	56,2	56,2	49,
„ 56 „ .	78	84,2	68,6	73,8	65,5	56.2	53	46,8	56,2	56,2	62,4	43,
„ 72 дні .	93,6	68.6	78	68,6	68,6	46,8	46.8	46,8	81,1	56.2	87,4	56,
„ 151 дзень	60,9	85,9	57,3	50,1	35,8	43	28,6	39,4	71,6	43	47,7	50,

Табліца № 6. Рэзультаты аналізу водных выцяжак з вэгэтацыйных судзін.

№№ судзін і ўгнаеньня	Судзіны без расьлін																Судзіны з расьлінамі пасьля ўборкі расьлін			
	I тэрмін аналізу пасьля сяўбы 15/VII				II тэрмін аналізу пачатак калашэньня 23/VII				III тэрмін аналізу дасьпяваньне 22/VIII				IV тэрмін аналізу пасьля ўборкі расьлін 3/X							
	Колькасьць N на 2 klgr глебы			ρH	Колькасьць N на 1 klgr глебы			ρH	Колькасьць N на 1 klgr глебы			ρH	Колькасьць N на 1 klgr глебы			ρH	Колькасьць N на 1 klgr глебы			ρH
	NH_3	NO_3	NO_2		NH_3	NO_3	NO_2		NH_3	NO_3	NO_2		NH_3	NO_3	NO_2		NH_3	NO_3	NO_2	
№ 5 КР	7,9	46,93	Сьл.	6,2	Сьл.	52,2	Сьл.	6,47	Сьл.	113,1	Сьл.	4,6	Сьл.	64,37	Сьл.	6,47	2,96	Сьл.	Сьл.	6,2
№ 9 КР+пачатковы мат. торфу	13,0	55,04	„	5,9	3,3	82,2	„	6,81	„	134	„	4,4	4,32	84,93	„	6,64	3,52	„	„	6,81
№ 13 КР+камп. торф без зараж.	15,79	45,26	„	6,47	3,2	97,2	„	6,81	„	120,2	„	4,6	3,5	90,83	„	6,64	2,65	„	„	6,3
№ 17 КР+к.т. з 1% CaO „ „	7,83	71,23	„	5,9	Сьл.	75,6	„	6,47	„	95,0	„	4,6	3,74	61,6	„	6,73	2,69	„	„	6,5
№ 21 КР+к.т. з 2% CaO „ „	6,98	86,21	„	6,2	„	89,4	„	6,64	„	134	„	4,8	3,67	88,88	„	6,64	3,42	„	„	7,5
№ 25 КР+к.т. з 4% CaO „ „	7,0	69,25	„	6,2	„	96,4	„	7,15	„	160	„	4,8	3,85	90,83	„	6,81	2,44	„	„	6,98
№ 29 КР+к.т. з 4% попелу „ „	6,98	69,39	„	6,2	„	99,4	„	6,47	„	122,8	„	4,6	4,53	58,0	„	6,81	3,26	„	„	6,81
№ 33 КР+к.т. з 4% попелу 0,38% CaO б.з.	9,77	77,08	„	6,2	„	93,2	„	6,47	„	90,0	„	4,8	3,65	58,0	„	6,81	2,51	„	„	6,98
№ 37 КР+0,64 gr CaO	9,41	70,08	„	6,64	2,6	47,4	„	6,91	„	123,2	„	4,6	3,68	93,42	„	6,98	3,11	„	„	6,98
№ 41 КР+1,27 gr CaO	8,61	66,7	„	6,64	Сьл.	45,0	„	6,81	„	79,2	„	4,6	Сьл.	88,37	„	6,81	2,4	„	„	6,98
№ 45 КР+2,54 gr CaO	6,83	67,62	„	6,81	„	68,4	„	6,64	„	99,4	„	4,8	„	101,2	„	6,98	Сьл.	„	„	7,35
№ 49 КР+2,4 gr попелу	7,11	66,58	„	6,81	„	51,4	„	6,81	„	86,0	„	4,8	„	69,5	„	7,15	4,87	„	„	7,15
№ 53 КР+2,4 gr попелу+0,23 gr CaO	8,64	80,0	„	6,64	„	50,2	„	6,81	„	113,2	„	4,8	„	150,0	„	6,98	Сьл.	„	„	6,98
№ 57 КР+к.т. з зараж.	13,44	65,94	„	6,2	„	78,4	„	6,81	„	167,0	„	4,8	„	184,0	„	6,73	„	„	„	6,98
№ 61 КР+к.т. з 1% CaO з зараж.	7,45	113,64	„	6,2	„	71,6	„	7,15	„	162,0	„	4,8	„	150,0	„	6,81	„	„	„	7,15
№ 65 КР+к.т. з 2% CaO „ „	9,13	110,7	„	6,2	„	83,2	„	6,91	„	132,0	„	4,8	„	177,2	„	6,81	„	„	„	6,98
№ 69 КР+к.т. з 4% CaO „ „	7,56	68,1	„	6,64	„	78,2	„	6,64	„	138,0	„	4,8	„	177,5	„	6,81	„	„	„	7,15
№ 73 КР+к.т. з 4% попелу „ „	11,9	66,28	„	6,81	„	71,0	„	6,81	„	77,6	„	4,8	—	—	„	—	„	„	„	6,98
№ 77 КР+к.т. з 4% „ і 0,38% CaO з.з.	9,97	68,24	„	6,81	„	65,6	„	6,91	„	135,2	„	4,8	Сьл.	64,37	„	6,90	„	„	„	6,98

Гідроліз крухмалу дэстыляванаю вадою пад ціскам.

Пэратварэньне крухмалу на дэкстрын і глюкозу пад уплывам слабых кісьлін наглядалася ў пяршыню Кірхгофам у 1811 годзе. Ёсьць таксама ўказаньне, што і бяз кісьлін, а толькі пры кіпячэньні з вадою крухмал можа пераходзіць у дэкстрын і часткаю ў глюкозу. Што да пытаньня аб уплыве ціску пры зацукраваньні крухмалу, дык яно амаль што зусім нераспрацована. Прынамсі ў тэй літаратуры, якою мы маем магчымасьць карыстацца, мы не знайшлі больш-менш дакладнага вывучэньня гэтага пытаньня. Вядома толькі, што ў тэхніцы пры зацукраваньні крухмалу, каб прысьпяшыць рэакцыю, ужываюць ціск у 2-3 атмасфэры. Пэўна, што ў даным выпадку, пры зацукраваньні крухмалу кісьлінаю, ціск прысьпяшае рэакцыю, але ў якой меры—зусім яшчэ ня высьветлена.

Вядома, што ціск і пры іншых каталітычных рэакцыях, напр., пры сынтэзе аманіяку, адыгрывае значную ролю. А таму нам здавалася вельмі цікавым высьветліць ролю ціску пры гідролізе крухмалу бяз удзелу кісьліны. З гэтаю мэтаю мы вывучалі зацукраваньне крухмалу дэстыляванаю вадою, у аўтаклаве пры розных цісках — з аднаго боку, з другога—вывучалі ўплыў часу на ступень гідролізу крухмалу пры адным і тым самым ціску, іменна, пры 20 атм.

Для досьледаў браўся растварымы крухмал у колькасьці аднаго граму. Крухмал усыпаўся ў шкляную коўбу, куды ўлівалася 200 куб. сант. дэстыляванай вады. Коўба затыкалася коркам і зьмяшчалася ў аўтаклаве. Зацукраваньне крухмалу рабілося пры розных цісках, але ў першай сэрыі досьледаў на працягу аднаго і таго-ж часу, іменна, 30 хвілін.

Колькасьць крухмалу знаходзілася вагавым спосабам: аднаўленьнем у шчолачным растворы медзянага купарвасу да закісі медзі і далей аднаўленьнем апошняй у струмені вадароду да мэталічнай медзі ў трубцы Аліна. Па колькасьці аднаўлёнай медзі ў табліцы Аліна знаходзілася адпаведная колькасьць цукру. З прычыны таго, што жыжка Фэлінга, якую ўжываюць для вызначэньня цукру, рэдуцыруецца і іншымі матэрыямі, напр., дэкстрынам, адначасна рабілася азначэньне і іншым растворам—растворам Soldaini, які, паводле думкі ўказанага аўтара, рэдуцыруецца толькі глюкозаю. Раствор Soldaini быў зроблен спосабам Dr. Preuss'a. Вынікі досьледаў першай сэрыі падведзены ў наступнай табліцы:

Табл. № 1.

Ціск у атмасфэрах	Колер раствору	Колькасны % цукру	
		Фэлінгавая жыжка	Раствор soldaini
1	Празрысты, бяз колеру	0	0
5	Таксама	0	0
10	Таксама	8	7
15	Празрысты, жоўты	24	12
20	Буры, амаль празрысты	70	45
30-35	Цёмны, мутны	34	17

Другая сэрыя досьледаў паказвае меру зацукраваньня крухмалу ў залежнасьці ад часу награваньня пры адным і тым-жа ціску, іменна, пры 20 атм. Даныя, з гэтай сэрыі зьмешчаны ў табліцы № 2.

Табл. № 2.

Час награваньня	Колер раствору пасьля награваньня	Колькасны $^0/_0$ цукру	
		Фэлінгавая жыжка	Раствор soldaini
5 хвілін	Празрысты, слаба-жоўты . .	30	21
30 „	Амаль што празрысты, буры .	70	45
60 „	Непразрысты, цёмна-буры . .	64	29
120 „	Таксама	53,5	20
240 „	Таксама	51	20

Працэс гідролізу крухмалу для абедзьвюх сэрый наглядна паказан на дыяграмах першай і другой. Як відаць з дыяграмы першай (пунктыр), колькасны $^0/_0$ цукру паволі расьце паміж 5 і 10 атмасф. ціску, яшчэ больш паволі паміж 10 і 15, а потым наглядаецца яўнае падвышэньне, пасьля чаго, паміж 20 і 30 атм. ціску колькасны $^0/_0$ цукру хутка спадае. Значыцца, пры зацукраваньні крухмалу дэстыляванаю вадою найбольшы колькасны $^0/_0$ цукру можна здабыць пры 20 атм. ціску. Другая дыяграма дае залежнасьць хуткасьці гідролізу крухмалу ад часу пры сталым ціску ў 20 атм. як паказвае гэтая дыяграма, максімальная колькасьць глюкозы выходзіць праз 30 хвілін; пасьля гэтага колькасьць глюкозы пачынае зьмяншацца і праз 4 гадзіны дасягае мінімальнай велічыні.

Зьмяншэньне колькасьці глюкозы пры цісках звыш 20 атм. і пры цісках у 20 атм. на працягу часу, больш як 30 хвілін, тлумачыцца далейшаю зьменаю глюкозы ад высокай тэмпэратуры.

Было-б вельмі цікава паўтарыць гэтыя досьледы ў поўфабрычным маштабе, прычым высьветліць сумесны ўплыў абодвух фактараў, г. з., ціску і кісьліны.

Можна прадбачыць, што пры 20 атм. ціску трэба было-б мінімальная колькасьць кісьліны дзеля таго, каб на працягу кароткага прамежку часу атрымаць найбольшы эфэкт.

Пэўна, што рацыянальнае вырашэньне гэтага пытаньня з тэхнічнага боку вымагае найбольш спрыяючай камбінацыі, як у сэнсе тэхнічнага зьдзяйсьненьня, таксама і ў сэнсе найменшай затраты сродкаў, іменна: найменшага ціску, найменшай траты кісьліны пры максімальных выхадах прадукту на працягу мінімальнага прамежку часу.

І. Красікаў і С. Каржанеўскі.

Оптымум тэмпэратуры і вакууму ў працэсе раскладаньня дрэўнага парашку серкаваю кісьляю.

Працэс раскладаньня воцатавакальцыевай солі серкаваю кісьляю выяўляецца наступным хэмічным раўнаньем: $Ca\,(CH_3COO)_2 + H_2SO_4 = CaSO_4 + 2\,CH_3COOH$. Рэакцыя, здаецца, самая простая і на першы погляд працэс, які адбываецца ў апараце Ліндэ пры раскладаньні дрэўнага парашку, павінен быў-бы ісьці бяз ніякіх перашкод. Але, як вядома, для атрыманьня воцатавай кісьлі ў заводзкай практыцы ўжываецца ня чысты $Ca\,(CH_3COO)_2$, а мешанка яго з рознымі смолападобнымі арганічнымі матэрыямі, што асабліва мае месца ў нас у СССР, дзе найбольш карыстаюцца чорным дрэўным парашком з нязначнаю колькасьцю $Ca\,(CH_3COO)_2$, ад 50 да 60%. Тлумачыцца гэта тэю акалічнасьцю, што шмат якія заводы атрымліваюць парашок ад саматужнікаў, якія ў большасьці выпадкаў насычаюць вапнаю неперагнаную падсмольную ваду, у выніку чаго выходзіць прадукт з малою колькасьцю $Ca\,(CH_3COO)_2$ і значнаю колькасьцю смаловых дамешак. Дамешка смолападобных матэрый у высокай меры ўскладняе працэс раскладаньня парашку серкаваю кісьляю.

Апроч мэханічнай чыннасьці (труднасьць выганкі рэшты CH_3COOH у канцы працэсу з прычыны абвалакваньня смаловаю матэрыяй кавалачкаў $Ca\,(CH_3COO)_2$. Смаловая матэрыя робіць чыннасьць на аднаўленьне $H_2\,SO_4$, выдзяляючы з яе воду і SO_2, разжыжаючы і забруджваючы (SO_2) канчаткавы прадукт вырабу $CH_3\,COOH$.

У сваім творы „Technologie der Holzverkohlung“ М. Кляр і паказвае (2 выд. 1910 г. стар. 255), што працэс раскладаньня дрэўнага парашку ня так просты, як гэта здаецца адразу.

Праглядаючы бедную, галоўным чынам нямецкую літаратуру па гэтаму пытаньню, можна знайсьці некаторыя ўказаньні практычнага характару, галоўным чынам у Кляра ў вышэйпаказаным творы. Наогул ўсе гэтыя ўказаньні накіроўваюцца к наступнаму: працэс трэба весьці па магчымасьці пры абсалютнай паветранай пустаце, пры магчыма нізкай тэмпэратуры і г. д. Усе гэтыя ўказаньні маюць агульны характар.

У сучасны момант пытаньне аб рацыяналізацыі нашай прамысловасьці, а таксама і хэмічнай набывае ўсё больш і больш важнае значэньне. Апошняя акалічнасьць і была прычынаю да таго, каб зрабіць гэтае невялічкае экспэрымэнтальнае абсьледваньне для высьвятленьня аптымальных умоў раскладаньня дрэўнага парашку серкаваю кісьляю.

Пачатковым матар‘ялам для працы быў дрэўны парашок двух сартоў: 1) для папярэдніх досьледаў парашок чорны з 42% колькасьці $Ca\,(CH_3COO)_2$ і 4,35% вады і 2) для далейшых досьледаў сэры парашок з 55,77% $Ca\,(CH_3COO)_2$ і 5,52% вады.

Досьледы рабіліся ў шкляной рэторце (замест апарату Ліндэ), куды загружалася ўва ўсіх выпадках 50 гр. парашку і розная колькасьць серкавай кісьлі, у першай сэрыі досьледаў ад 30 да 35 гр. (66° Бомэ), і ў другой сэрыі ўва ўсіх выпадках 20 гр. (на 3 гр. больш тэарэтычнай колькасьці). Праз тубулюс рэторты праходзіла шкляная мяшалка для разьмешваньня масы ў час досьледу. Рэторта награвалася ў гліцарынавай награвальні і злучалася праз ахаладальнік з прыемнікам, а апошні праз дзьве шклянкі Цішчанка (з растворам NaOH для паглынаньня кіслай пары) з паветранаю помпаю і манамэтрам.

Ува ўсіх выпадках II сэрыі досьледаў, за выключэньнем аднаго, награваньне пачыналася без вакууму пры $t = 120°$ і цягнулася 1 гадзіну, потым прыемнік злучаўся з помпаю і дэстыляцыя цягнулася пры належным вакууме і тэмпэратуры ½ гадзіны.

У здабытым дэстыляце (вага якога таксама азначалася), знаходзілася колькасьць 100 % CH_3COOH і SO_2 цытраваньнем NaOH і растворам іоду. Кожны досьлед паўтараўся некалькі разоў, покуль не дабіваліся аднамасных вынікаў, і з іх браліся сярэднія лічбы. У ніжэйпададзенай табліцы паказаны, як умовы досьледаў (вакуум і тэмпэратура), таксама і сярэднія вынікі ўсіх досьледаў.

I сэрыя досьледаў (папярэдняя).

t°	Вакуум у прыемніку	Час награваньня	Усяго дэстыляту ў гр.	У ім воцатвай і серкаватай кісьлі	Колькасьць SO_2 у гр.	Колькасьць чыстай 100% CH_3COOH у гр.	Дужасьць кісьлі (дэстыляту) у %	Колькасьць SO_2 у % адносна CH_3COOH (100%)	Тэарэтычны выхад 100% CH_3COOH у гр.	Сапраўдны выхад у % ад тэарэтычнага
160-170	Без вак.	1 гадз.	5,82	4,21	0,41	3.8	65,29	10,78	16,07	23,64
160-170°	560m/m.	„	7,02	4,58	0,228	4,352	61,96	5,2	„	27,06
160-170	410	„	9,02	5,8	0.39	5.41	59,97	7.02	„	33,66
160-170°	200	„	9,02	5,35	0,24	5,11	56,65	4,69	„	31,79
160°	80	„	11,5	6,1	0.199	5,9	51,39	3.3	„	36,77
120°-140°	80	„	4,8	3,72	0,13	3,59	74,79	3.6	„	22,33
140°	180	„	8.2	5,43	0,17	5,26	64,14	3.2	„	32,73
II сэрыя досьледаў.										
120°	Без вак.	1 гадз.	20,35	15,13	0,322	14,71	72,28	2,18	21,1	69,71
160°	160m/m	½ „								
120°	Без вак.	1 „	22,3	16,1	0,35	15,75	70.62	2,22	„	74,64
180°	160	½ „								
120°	160m/m	1 „	20,0	14,92	0,478	14,44	72,2	3,31	„	68.43
160°		½ „								
120°	Без вак.	1 „	16,5	12,42	0,274	12,15	73,63	2,25	„	57,58
140°	80m/m	½ „								
120°	Без вак.	1 „	17,8	11,77	0,274	11,5	64,6	2,38	„	54,5
140°	40m/m	½ „								
120°	Без вак.	1 „	20,0	14,14	0,342	13,8	69,0	2,47	„	65,4
180°	80	½ „								
1[illegible]0°	Без вак.	1 „	17,7	11,49	0,288	11,2	63.2	2,61	„	53.0
200°	40m/m	½ „								

На падставе дасьледчага матар'ялу можна зрабіць наступныя вывады.

Пры раскладаньні 42% парашку:

1) ува ўсіх выпадках бываюць нізкія выхады кісьлі, значныя колькасьці SO_2, і кісьля выходзіць нізкапроцантавая;

2) зьніжаючы тэмпэратуру да 140° і павялічваючы вакуум удаецца павялічыць канцэнтрацыю кісьлі, значна зьменшыць колькасьць SO_2, але выхады кісьлі застаюцца малымі.

Пры раскладаньні 55% парашку:

1) maximum выхаду параўнальна высокапроцантавай кісьлі (70%) бывае пры пачатковай тэмпэратуры у 120°, канчатковай у 180°, прычым $^2/_3$ усяго часу дэстыляцыі апошняя робіцца без вакууму, і толькі ў канцы ўстанаўляецца вакуум у 160 mm. Пры гэтых-жа ўмовах бывае і minimum SO_2;

2) вядзеньне працэсу без вакууму з самага пачатку працэсу ня мае сэнсу, бо хоць і дасягаецца нязначнае павялічэньне дужасьці кісьлі, але за тое зьмяншаецца выхад кісьлі і павялічваецца колькасьць SO_2;

3) павялічэньне вакууму да 40 mm дае адмоўныя вынікі, зьмяншаючы выхады кісьлі і павялічваючы колькасьць SO_2;

4) павялічэньне t° да 200° пры вакууме ў 40 mm павялічваецца колькасьць SO_2 і зьніжае як выхад, так і дужасьць кісьлі, якая здабываецца.

5) нізкія t°—120°-140° і высокія вакуумы—80 mm і 40 mm не даюць дадатных вынікаў,—наглядаюцца нізкія выхады кісьлі і павялічэньне колькасьці SO_2.

К. М. Кораткаў.

Адказны рэдактар праф. **М. Ц. Козыраў**.